ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica 6

1. Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$; hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

i) $0 < \lvert z\rvert < 1$	**ii)** $1 < \lvert z\rvert < 2$	**iii)** $\lvert z\rvert > 2$
iv) $1 < \lvert z-1\rvert$	**v)** $2 > \lvert z-2\rvert > 1$	**vi)** $0 < \lvert z-1\rvert < 1$

2. Hallar el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\dfrac{e^z}{z-1}$ en $|z| > 1$.

3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostrar que

$$e^{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, donde para $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos t}\cos nt\,dt$$

4. Sea $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ válido para $r_1 < |z-a| < r_2$ con $r_2 > r_1 \geq 0$. ¿Qué se puede decir del comportamiento de f en a si:

   i) $r_1 > 0$?

   ii) $r_1 = 0$ y $a_k = 0$ para todo $k \leq -n_0$ con $n_0 \in \mathbb{N}$?

   iii) $r_1 = 0$ y para todo $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ existe $m \leq k$ tal que $a_m \neq 0$?

5. Considerar la serie de Laurent

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

¿Qué tipo de singularidad tiene en 0? (Sugerencia: decidir cuál de los ítems del ejercicio anterior se cumple.)

6. Verificar que si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, entonces el desarrollo en serie de Laurent de f en $1 < |z| < 2$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

7. **i)** Verificar que f tiene un cero de orden k en $z = a$ sii $\frac{1}{f}$ tiene un polo de orden k en $z = a$.

   ii) Si f tiene un cero (polo) de orden k en $z = a$ y g tiene un cero (polo) de orden k en $z = a$ ¿Que clase de singularidad tiene $\frac{f}{g}$ en $z = a$? (considere todos los casos posibles).

8. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Determinar su naturaleza; si es evitable defina $f(0)$ de modo que resulte holomorfa en $z = 0$, si es un polo halle la parte singular.

i) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$	**ii)** $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$	**iii)** $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$
iv) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$	**v)** $f(z) = \dfrac{\log(z+1)}{z}$	**vi)** $f(z) = \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$
vii) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z+1)}$	**viii)** $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$	**ix)** $f(z) = z \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

9. Sea $f(z) = \dfrac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}$. Probar que ∞ es a lo sumo una singularidad aislada. Clasificarla de acuerdo con el grado de los polinomios.

10. **i)** Pruebe que una función entera tiene una singularidad evitable en ∞ sii es constante.

    ii) Pruebe que una función entera tiene un polo de orden n en ∞ sii es un polinomio de grado n.

11. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ enteras y biyectivas.

12. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\widehat{\mathbb{C}}$. En el caso de ceros o polos determinar el orden.

i) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$ **ii)** $f(z) = \cos z e^{-\frac{1}{z^2}}$

iii) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 5} + z e^{\frac{1}{z}}$ **iv)** $f(z) = \dfrac{z^5}{1 + z^4}$

v) $f(z) = \left(\operatorname{sen} \frac{1}{z^2}\right)^{-1}$ **vi)** $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$

vii) $f(z) = \dfrac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1}$ **viii)** $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$

ix) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 1}$

13. **i)** Si z_0 es una singularidad esencial de f y un polo de g, decidir que tipo de singularidad tienen $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ en z_0.

ii) Probar que una singularidad aislada de f no puede ser un polo de $e^{f(z)}$.

Residuos

14. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas y en ∞

i) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$ **ii)** $f(z) = \dfrac{1}{z^3} \operatorname{sen} z$

iii) $f(z) = z^5 \cos \dfrac{1}{z}$ **iv)** $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1 + z}$

15. **i)** Sea a un polo de orden m de f y sea $g(z) = (z-a)^m . f(z)$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$$

ii) Deducir que si a es un polo simple de f entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

16. Sea f una función meromorfa en un abierto conexo Ω.

i) Si f tiene un polo de orden m en $\alpha \in \Omega$ su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \alpha\right) = -m$.

ii) Si f tiene un cero de orden m en $\beta \in \Omega$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \beta\right) = m$.

iii) Si f tiene un polo simple en a y g es holomorfa en a probar que

$$\operatorname{Res}(f \cdot g, a) = \operatorname{Res}(f, a) \cdot g(a)$$

17. Calcular los siguientes residuos:

i) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2 z}$ en $z = 0, 1$ **ii)** $\dfrac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ en $z = \infty$

iii) $\dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ en $z = \pi i$ **iv)** $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)z}$ en $z = 0, -1, \infty$

18. Sea C la circunferencia $|z| = 2$ recorrida en el sentido positivo. Calcular

i) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^4+1}$ **ii)** $\displaystyle\int_C \frac{1+\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z} dz$ **iii)** $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$

19. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Se define en Ω la función $f(z) = z^2 \log\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ tomando para el logaritmo la determinación que es real cuando z es real y mayor que 1.

i) Calcular $\operatorname{Res}(f, \infty)$.

ii) Calcular $\int_C f(z)dz$ siendo $C : |z| = 2$ recorrida en sentido positivo.

20. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa salvo en los polos simples $a_1, \ldots, a_n$. Si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)g(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \eta(\gamma, a_k) g(a_k) \operatorname{Res}(f, a_k)$$

para toda curva γ que no pasa por $a_1, \ldots, a_n$ y tal que $\eta(\gamma, \omega) = 0$ para todo $\omega \notin \Omega$.

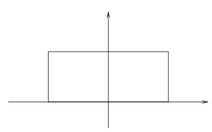
21. Sea f meromorfa en Ω con ceros $z_1, \ldots, z_n$ y polos $p_1, \ldots, p_n$ contados con su multiplicidad. Si g es holomorfa en Ω y γ es una curva cerrada tal que $\eta(\gamma, z) = 0$ para todo $z \notin \Omega$, y que no pasa por ningún cero ni ningún polo, probar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^{n} g(z_i) \eta(\gamma, z_i) - \sum_{j=1}^{m} g(p_j) \eta(\gamma, p_j)$$

22. Sea f holomorfa en $\overline{B_R(a)}$ e inyectiva en $B_R(a)$. Si $G = f\big(B_R(a)\big)$ y γ : $|z - a| = R$, probar que f^{-1} está definida en G y para cada $\omega \in G$ se tiene

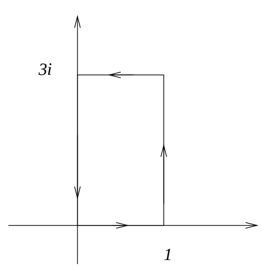
$$f^{-1}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z) - \omega} dz$$

23. Sea f entera y γ una curva como en la figura



Si $\displaystyle\int_\gamma z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ probar que f no se anula en el interior de γ.

24. Sea f meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z + 3i) = f(z)$ y $f(z + 1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que si f no tiene polos ni ceros dentro de γ, entonces la cantidad de ceros de f dentro de γ es igual a la cantidad de polos de f dentro de γ (contados con su multiplicidad), siendo γ el rectángulo de vértices 0, 1, $1 + 3i$ y $3i$:



25. Consideremos la ecuación $z^5 + 15z + 1 = 0$.

i) Probar que tiene una única raíz en $|z| < \frac{3}{2}$.

ii) ¿Hay alguna raíz en $|z| \geq 2$?

26. Probar que la ecuación $z^n e^{\alpha - z} = 1$ $(\alpha > 1)$, tiene exactamente n raíces en $|z| < 1$.

27. Probar que la función $f(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva en $|z| < 1$ y que el resto de las raíces están en $1 < |z| < 2$.

28. Sea f holomorfa alrededor de z_0. Probar que f es inyectiva en algún entorno de z_0 si y solo si $f'(z_0) \neq 0$.

29. Sea f holomorfa y no constante en $\Delta := \{|z| < r\}$ tal que $f(0) = 0$. Probar que existe un entorno Ω de 0 contenido en Δ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva tal que $g(\Omega) = \{|z| < s\}$ para algún s y $f(z) = g(z)^{\mathrm{mult(f,0)}}$ para todo $z \in \Omega$.

Cálculo de integrales reales mediante el Teorema de los Residuos

30. **i)** Sea $R(x, y)$ una función racional con coeficientes reales sin polos en la circunferencia unidad. Probar que

$$\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen} t, \cos t)dt = 2\pi \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}\left\{\frac{1}{z} R\left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right], z_k\right\}$$

ii) Calcular

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \operatorname{sen} t}$ $\quad (a \in \mathbb{R}, a^2 > 1)$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2}$ $\quad (0 < b < a)$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2t)}{1 - 2a\cos t + a^2} dt$ $\quad (a \in \mathbb{R}, a^2 < 1)$

31. **i)** Sea $R : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. una función racional con coeficientes reales y sin polos reales. Supongamos que $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} R(z)$$

con la suma extendida a los polos de R situados en el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$.

ii) Calcular

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx$ **(c)** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}dx$

32. **i)** Sea f una función holomorfa en un entorno del semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$, salvo en un número finito de puntos ninguno de los cuales está sobre el eje real. Supongamos que f verifica $\displaystyle\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} |f(z)| = 0$

Entonces

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\ z_k>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, z_k)$$

ii) Calcular

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}dx$ **(c)** v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}dx$

33. **i)** Sea f como en i) del ejercicio anterior pero supongamos que ahora tiene un polo simple en el origen. Probar que

$$\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} f(x)e^{ix}dx + \int_{\delta}^{\infty} f(x)e^{ix}dx \right) =$$

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}\right) + \pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz}, 0\right)$$

ii) Probar que

$$\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx \right) = \pi i$$

y deducir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

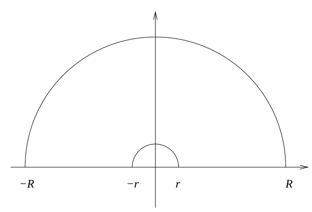
34. **i)** Sea R una función racional con coeficientes reales sin polos sobre el semieje real positivo. Supongamos que $\displaystyle\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Probar que

$$(1-e^{-2\pi i\alpha}) \int_{0}^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right)$$

donde la rama elegida de z^α es la obtenida tomando el argumento de z en $(0, 2\pi)$.

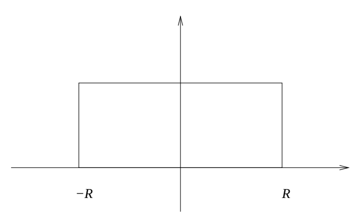
ii) Calcular
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} dx$$
para $0 < \alpha < 1$

35. Para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, probar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$ converge y calcularla integrando en la curva:

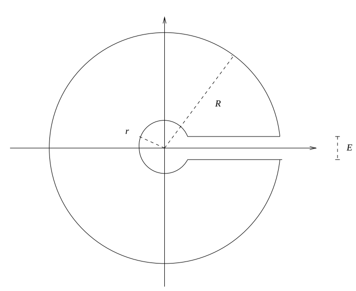


para $r \to 0$ y $R \to \infty$.

36. Para $0 < a < 1$ calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx$ integrando en a



37. Probar que las siguientes integrales convergen y calcularlas integrando en la curva:



(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3 + x}$