

ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica 7

Sucesiones de funciones holomorfas

Notaciones: En esta práctica, \mathcal{D} será un abierto conexo de \mathbb{C} y notaremos $\mathcal{O}(\mathcal{D}) := \{f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es holomorfa}\}$

1. Sea $P_n(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!}$. Demostrar que dado $R > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale que P_n no tiene ceros reales de módulo menor que R .

2. Probar que la función *gamma*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

es holomorfa en $\text{Re}(z) > 0$.

3. Probar que $\left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ converge a e^z en $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

4. **i)** Si $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ converge uniformemente a f en K compacto y $f(z) \neq 0$, $\forall z \in K$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ f_n no se anula sobre K y $\frac{1}{f_n} \xrightarrow{\text{unif}} \frac{1}{f}$ sobre K .

ii) Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y $(g_n)_{n \geq 1}$ sucesiones de funciones en $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ tales que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en K y $g_n \xrightarrow{\text{unif}} g$ en K entonces $f_n \cdot g_n \xrightarrow{\text{unif}} f \cdot g$ en K .

iii) Sean $f, (f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$, $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en K y f no se anula en K . Si $K = \text{Int} \gamma$, siendo γ una curva tal que $\eta(\gamma, z) = 0$ o 1 para todo $z \in \mathbb{C} - K$ y f es no constante y no nula en K y sean $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tal que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ la cantidad de ceros de f_n es igual a la cantidad de ceros de f en $\text{Int}(\gamma)$.

5. Sea $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tal que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ *ustc* de \mathcal{D} y supongamos que $f \neq 0$, pero existe $a \in \mathcal{D}$ tal que $f(a) = 0$. Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ existe un número complejo a_n tal que $f_n(a_n) = 0$ y $a_n \rightarrow a$.

6. Probar que, dada una sucesión $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tal que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ *ustc* de \mathcal{D} y una sucesión $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}$ que converge a $z \in \mathcal{D}$, entonces $f_n(z_n) \rightarrow f(z)$.
7. Si $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ y $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ *ustc* de \mathcal{D} , entonces $e^{f_n} \xrightarrow{\text{unif}} e^f$ *ustc* de \mathcal{D}

Sucesiones de funciones meromorfas

8. i) Demostrar que

$$\left(\frac{\pi}{\text{sen } \pi z} \right)^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

(Sugerencia: observar que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en \mathbf{C} periódicas de período 1, con polos en todos los enteros n de orden 2 cuya parte singular es $\frac{1}{(z-n)^2}$. Por lo tanto su diferencia es una función entera. Mostrar que ambas funciones tienden a cero cuando $|y| \rightarrow +\infty$ uniformemente respecto a x y concluir).

- ii) Sumar las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

9. Probar que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cotg(\pi z)$$

10. Sea $f(z)$ una función meromorfa de polos simples en los puntos a_1, \dots, a_n, \dots donde $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Sea A_n el residuo de $f(z)$ en cada polo a_n . Supongamos que existe una sucesión de contornos cerrados C_m que verifican:

- Ningún C_m pasa por ningún a_n .
- $C_m \subset C_{m+1}^o$
- Si llamamos $R_m := d(C_m, 0)$ vale que $R_m \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$.
- Si llamamos $d_m = \text{long}(C_m)$, vale que $d_m = O(R_m)$.
- $\sup_{z \in C_m} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Probar que entonces $f(z) = f(0) + \sum_{n \in \mathbf{N}} A_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$.

Sugerencia: Calcular $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\xi)}{\xi(\xi - z)} d\xi$