ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica 1

Números Complejos - Plano Complejo

1. Exprese los siguientes números complejos de la forma $a + ib$ donde a y b son números reales.

   i) $(-1 + 3i)^{-1}$ **ii)** $(i+1)(i-1)(i+3)$ **iii)** $\dfrac{2+i}{2-i}$

   iv) $\dfrac{1+i}{i}$ **v)** $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$ **vi)** $(1+i)^{100}$

   vii) $(1+i)^n + (1-i)^n$

2. Sean z y w dos números complejos. Muestre que

   i) $\overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$

   ii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

   iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

   iv) $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

   v) $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

3. Pruebe que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_n X^n + \overline{a}_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0$.
   Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

4. Sea $\mid z \mid = \sqrt{z\overline{z}}$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Probar que

   i) Si $z = a + bi$, $\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$

ii) $| z \cdot w | = | z | \cdot | w |$ y $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{| z |}{| w |}$

iii) $- | z | \leq Re(z) \leq | z |$ y $- | z | \leq Im(z) \leq | z |$

iv) $| z + w |^2 = | z |^2 + | w |^2 + 2Re(z \cdot \overline{w})$

v) $| z - w |^2 = | z |^2 + | w |^2 - 2Re(z \cdot \overline{w})$

vi) $| z + w |^2 + | z - w |^2 = 2\big(| z |^2 + | w |^2 \big)$

vii) $| z + w | \leq | z | + | w |$

viii) $\big| | z | - | w | \big| \leq | z + w |$

5. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = | z - w |$ es una métrica.

6. Sea $\alpha = a + bi$, $z = x + iy$ y sea $c > 0$. Transforme la condición $| z - \alpha | = c$ en una ecuación que involucre solo a x, y, a, b y c; describir que figura geométrica representa esta ecuación.

7. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

   i) $| z - i + 3 | = 5$ **ii)** $| z - i + 3 | \leq 5$ **iii)** $Re(z) \geq 0$

8. **i)** Pasar de la forma $x + iy$ a la forma polar

   (a) $1 + i\sqrt{2}$ **(b)** $-5i$ **(c)** -3

   ii) Pasar de la forma polar a la forma $x + iy$

   (a) $3e^{i\frac{\pi}{4}}$ **(b)** $e^{-i\pi}$ **(c)** $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$

9. Dibuje todos los complejos de la forma $z^n = 1$ para $n = 2, 3, 4, 5$.

10. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Muestre que hay n complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

Definición: $e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$

11. **i)** Describa los z tales que $e^z = 1$.

ii) Si $e^z = e^w$, entonces hay un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$

iii) Sean $w, \alpha \in \mathbb{C}$ tales que $e^\alpha = w$. Describa los z tales que $e^z = w$.

12. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Muestre que

i) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

ii) Generalizando las igualdades del item anterior se define para $z \in \mathbb{C}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ y $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0$ y $\operatorname{sen} z = 0$ son los valores reales usuales.

13. Sea $z \neq 1$. Probar que $1+z+\cdots+z^n = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$ y calcular $1+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta$ para $0 < \theta < 2\pi$.

Sucesiones

14. **i)** Probar que si $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

ii) Dar un ejemplo donde no valga la recíproca.

iii) ¿Cuando vale la recíproca?

15. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

i) ni^n **ii)** $n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ **iii)** $\left(\dfrac{(-1)^n+1}{2}\right)^n$

iv) $\cos(n\pi) + i\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$

16. **i)** Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuál es el $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$?. Demuéstrelo.

ii) Idem para $|\alpha| > 1$.

iii) Si $|\alpha| < 1$, pruebe que $\lim_{n\to\infty} \left(1+\alpha+\cdots+\alpha^n\right) = \dfrac{1}{1-\alpha}$

17. Para $|z| \neq 1$ mostrar que el siguiente límite existe

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z^n-1}{z^n+1}\right)$$

¿Es posible definir $f(z)$ para $\mid z \mid = 1$ tal que f resulte continua?

18. ¿Para que números $z \in \mathbb{C}$ está definida $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{z^n}{z^n+1} \right)$?

19. Probar que si $|z| > 2$, la sucesión definida por: $z_0 = z$, $z_1 = z^2 + 2$, y en general $z_{n+1} = z_n^2 + 2$ para todo $n \geq 1$ verifica $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Plano Complejo ampliado - Esfera de Riemann

20. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 y centro en $(0,0,0)$. Sea $N = (0,0,1) \in S$ definimos la proyección estereográfica $\theta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ haciendo $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ sii $(a, b, 0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.

i) Probar que $\theta(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.

ii) Probar que θ es una biyección y su inversa está dada por

$$\varphi(z) = \Big(\frac{2Re(z)}{1+|z|^2}; \frac{2Im(z)}{1+|z|^2}; \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \Big)$$

para $z \in \mathbb{C}$.

iii) Calcular $\varphi\big(Im(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(Re(z) = 0\big)$.

iv) Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, es decir, si z, $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\overline{d}(z, z') = d\big(\varphi(z), \varphi(z')\big)$ donde d es la distancia euclídea.

(a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$.

(b) Probar que la métrica usual en $\mathbb{C}$ es equivalente a la inducida en $\mathbb{C}$ por $\overline{d}$ (probar, por ejemplo, que $(\mathbb{C}, \overline{d})$ y $(\mathbb{C}, d_{usual})$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

(c) Verificar que $\overline{d}(z, w) = \dfrac{2|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ para $z, w \in \mathbb{C}$ y $\overline{d}(z, \infty) = \dfrac{1}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$ para $z \in \mathbb{C}$.

(d) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

21. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el un único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta. En caso contrario, se proyecta sobre una circunferencia.

<u>**Homografías**</u>

Definición: Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

22. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

23. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

24. Demostrar que una homografía $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ aplica $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si y solo si se puede escribir con coeficientes reales.

Definición: Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) por $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \dfrac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$. Observar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$

25. **i)** Probar que si $T \in \mathcal{H}$ entonces $\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

    ii) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 yacen en una circunferencia si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Definición: Sea C una circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de C. Dos puntos z y z^* son *simétricos* respecto de C sii $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.

26. **i)** Probar que la definición anterior no depende de los punto elegidos z_2, z_3, z_4 sino de C.

    ii) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de C. A la aplicación que a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna su simétrico respecto de C se la llama *simetría respecto de* C. Probar que para cada homografía T que aplica $\mathbb{R}$ en C, la función

$$T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

es la simetría respecto de C.

iii) Interpretar geométricamente la noción de simetría en el caso en que C es una recta.

iv) Probar que si S es una homografía y z, z^* son simétricos respecto de una circunferencia C, entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.

27. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia C (respecto a C) es ∞.

28. Hallar homografías que transformen

i) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

ii) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z+1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i.

iii) el disco $|z| < R$ en si mismo y además α en 0 ($|\alpha| < R$).

iv) El semiplano superior $Im(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $Im(\alpha) > 0$).

29. Sea $S(z) = \dfrac{z+i}{z+1}$. Sea $z_1 = 1$ y $z_n = S(z_{n-1})$ para $n \geq 2$. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ existe y es igual a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. (sug: $T(w) = \dfrac{w-\sqrt{i}}{w+\sqrt{i}}$ donde $w = S(z)$.)

30. Sea $S(z) = \dfrac{z+2}{z+1}$, $z \neq -1$ y definamos $z_0 = i$, $z_n = S(z_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Probar que $Re z_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ es acotada.

iii) Probar que $z_n \to \sqrt{2}$.