

ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica 2

1. Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Probar que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = a$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = b$.
2. Sean $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ relacionadas por $g(x, y) = f(x + iy)$.
 - i) Suponiendo que f es derivable en $z_0 = a + ib$, probar que g es diferenciable en (a, b) . Calcular $f'(z_0)$ y $Dg(a, b)$.
 - ii) ¿Es cierto que si g es diferenciable en (a, b) entonces f resulta derivable en $a + ib$?
 - iii) Hallar todas las funciones $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en todo punto.
3. Sean $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ relacionadas por $f(x + iy) = u(x + iy) + i \cdot v(x + iy)$; $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Supongamos que f es derivable en z_0 .
 - i) Calcular $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ y $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$ en términos de u y v . ¿Qué se deduce?
 - ii) Suponiendo que u y v son C^2 , calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.
 - iii) Si $z_0 = a + ib$, probar que g es diferenciable en (a, b) . Calcular $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a, b)$ en términos de u y v .
4. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0 \end{cases}$$

Verificar que f es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

5. Determinar los puntos donde f es derivable y donde es holomorfa.

$$\text{i)} \quad f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \quad f(z) = \bar{z}$$

$$\text{iii)} \quad f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy) \quad \text{iv)} \quad f(z) = x^2 + iy^2$$

6. Analizar donde son holomorfas las siguientes funciones. Hallar $f'(z)$ en cada caso.

$$\text{i)} \quad f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad \text{ii)} \quad f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$$

$$\text{iii)} \quad f(z) = x^2 + iy^3 \quad \text{iv)} \quad f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$$

$$\text{v)} \quad f(z) = z^3 - 2z \quad \text{vi)} \quad f(z) = \frac{z+1}{1-z}$$

7. Un subconjunto de \mathbf{C} se dice una **región** si es abierto, conexo y no vacío. Probar que todas las componentes conexas de un abierto son regiones.

8. Demostrar que si a una región se le remueven una cantidad finita de puntos, sigue siendo una región.

9. Sea $\Omega \subset \mathbf{C}$ una región. Probar:

i) Si f y \bar{f} son holomorfas en Ω , entonces f es constante.

ii) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω , entonces f es constante.

iii) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv g'$ entonces $f - g$ es constante.

10. Sea $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorfa. Demostrar:

i) $\operatorname{Re}(f) = cte \Rightarrow f$ cte.

ii) $\operatorname{Im}(f) = cte \Rightarrow f$ cte.

iii) $|f| = cte \Rightarrow f$ cte.

iv) $\arg(f) = cte \Rightarrow f$ cte.

11. Sea D un abierto simétrico respecto del eje real y $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ holomorfa. Probar que la función $g : D \rightarrow \mathbf{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa.

12. i) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^2$ una recta. Probar que si $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa e $Im(g) \subseteq L$ entonces g es constante.

ii) Sean $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y L_1, \dots, L_N rectas (en \mathbb{R}^2 o \mathbb{C}). Probar que si $Im(g) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_N$ entonces g es constante.

13. Sea $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que v es la *conjugada armónica* de u si $f(z) = u + iv$ es holomorfa.

i) Hallar la conjugada armónica de $u(x, y) = x^2 - y^2$ y de $u(x, y) = 2x(1 - y)$

ii) Probar que si v y \tilde{v} son conjugadas armónicas de u , entonces v y \tilde{v} difieren en una constante.

iii) Probar que si u y v son mutuamente conjugadas armónicas entonces son constantes.

14. Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ un abierto de \mathbb{R}^2 y $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 . Probar que si u admite una conjugada armónica entonces u es armónica, es decir, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

15. Regla de L'Hospital

Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

(Sugerencia: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$ donde $\lim_{z \rightarrow z_0} \eta(z) = 0$).

16. Calcular:

i) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}$

ii) $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i}$

iii) $\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi \cdot i}{3}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi \cdot i}{3}}) \cdot z}{z^3 + 1}$

iv) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$

17. Sea $T(z) = \frac{z + 1}{z + 2}$

i) Hallar las soluciones de la ecuación $T(z) = z$. Los puntos hallados se llaman los *puntos fijos* de T .

- ii) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario, se define la sucesión $z_n = T(z_{n-1})$ para $n \geq 0$. Verificar que, si z_n converge, el posible límite es uno de los puntos fijos de T .
- iii) Se llama *circunferencia isométrica* de T al conjunto $C_T := \{z \in \mathbb{C} / |T'(z)| = 1\}$. Verificar que si $p, q \in C_T$ entonces $|T(p) - T(q)| = |p - q|$. ¿Qué sucede si $|T'(p)|$ y $|T'(q)|$ son mayores (respectivamente menores) que 1?
- iv) Calcular $T(C_T)$. Si $R = \{z \in \mathbb{C} / |T'(z)| < 1\}$ y $S = \{z \in \mathbb{C} / |T'(z)| > 1\}$, calcular $T(R)$ y $T(S)$.
- v) Ubicar los puntos fijos en R o S . Demostrar que la sucesión definida en ii) converge y hallar su límite.
- vi) Si $T(z) = \frac{2z + 5}{-z - 2}$, ¿qué sucede con la sucesión definida en ii)?