ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica 3

1. Hallar los términos de orden ≤ 3 en las siguientes series de potencias cuando sea posible:

i) $e^z \operatorname{sen} z$ ii) $(\operatorname{sen} z)(\cos z)$ iii) $\dfrac{e^z - 1}{z}$

iv) $\dfrac{e^z - \cos z}{z}$ v) $\dfrac{1}{\cos z}$ vi) $\dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

vii) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ viii) $\dfrac{e^z}{\operatorname{sen} z}$

2. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$. Se define $f(-z) := \sum_n a_n (-z)^n = \sum_n a_n (-1)^n z^n$. Se dice que $f(z)$ es *par* (*impar*) si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que f es par sii $f(-z) = f(z)$ y f es impar sii $f(-z) = -f(z)$.

3. Se definen los **números de Bernoulli** B_n por la serie de potencias:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

Probar la fórmula recursiva:

$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

Entonces $B_0 = 1$. Calcular B_1, B_2, B_3, B_4.
Mostrar que $B_n = 0$ si n es impar $\neq 1$.

4. Mostrar que

$$\frac{z}{2} \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

Reemplazar z por $2\pi i z$ y demostrar:

$$\pi z \cot \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$$

5. Sea la sucesión (llamada de Fibonacci) definida recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y, si $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

i) Probar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ representa, en un entorno del origen, a una función racional $R(z)$.

ii) Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, desarrollar $R(z)$ en serie de potencias en un entorno del origen.

iii) Comparando las dos series se obtiene una fórmula cerrada para la sucesión de Fibonacci.

6. **Criterio de Weierstrass**

Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Se tiene entonces la siguiente implicación:

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente en X.

7. Sean $(A_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ sucesiones de números complejos tales que $(A_n \cdot v_n)_{n\geq 0}$ converge, entonces

$A_0 v_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1}) \cdot v_n$ converge si y solo si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot (v_n - v_{n+1})$ converge.

8. **Criterio de Dedekind**

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(v_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de números complejos tales que la sumas parciales de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ están acotadas, $\lim v_n = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n+1})$ es absolutamente convergente.

Entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot v_n$ converge.

(Sugerencia: usar el ejercicio anterior).

9. **Criterio de Dirichlet**

Si $(r_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a cero y existe $M > 0$ tal que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot z_n$ converge.

(Sugerencia: usar criterio de Dedekind.)

10. **Criterio de Bois-Reymond**

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n+1})$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot v_n$ converge.

11. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

i) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$ **ii)** $a_n = \dfrac{1}{2n}$ **iii)** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

iv) $a_n = \left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)^n$ **v)** $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **vi)** $a_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

vii) $a_n = \dfrac{\rho^n n!}{n^n} \quad (\rho > 0)$

12. Demostrar que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números reales positivos tal que existe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \mathcal{L}$, entonces existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y es igual a $\mathcal{L}$.

13. Demostrar que la serie de término general $a_n = \dfrac{1}{n^p\big(\log(n)\big)^q}$, $n \geq 2$,

i) converge para todo $q > 0$ si $p > 1$.

ii) converge para $q > 1$ y $p = 1$.

iii) diverge para todo $q > 0$ si $p < 1$.

iv) diverge para $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

14. Sea $r > 0$. Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} / \sqrt[n]{|a_n|} > r\}$ es infinito entonces el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ es 0 o bien $R \leq r^{-1}$.

15. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que los conjuntos de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} \cdot z^n$ son iguales.

16. Hallar el conjunto de convergencia de las siguientes series (para aquellas que son series de potencias, calcular el radio de convergencia y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia):

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$ **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+(1+i)^n}$ **iii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$ **v)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$ **vi)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n \quad (a \in \mathbb{C})$ **viii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C})$ **ix)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(z^4+2z^2+1)^n}{7^n}$ **xi)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n+1}}{(n+1)^3 4^n}$ **xii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$ **xiv)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(z-i)^n}{4^n(n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ **xv)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} n) z^n$

xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n z^n}{5^n}$ **xvii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}$ **xviii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$

17. Determinar el conjunto de convergencia *absoluta* de la siguientes series

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n z^n + z^{n+1})$ **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$ **iii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$ **v)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$ **vi)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+|z|}$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$ **viii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n z}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ **ix)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

18. Hallar <u>todos</u> los números complejos z, tales que la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(\ln n - 1)}{(n-2)^2} \left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z}\right)^n$$

converge, siendo α un número complejo <u>fijo</u> con $|\alpha| < 1$.

19. Mostrar que si el radio de convergencia de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^p z^n$ es también ρ.

20. **Función Exponencial**
Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ y $g(z) = e^z$.

i) Verificar que $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas con $f'(z) = f(z)$ y $g'(z) = g(z)$. Demostrar que $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ es constante y deducir que $f \equiv g$.

ii) Probar que $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

iii) Verificar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

iv) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.

v) Analizar la existencia de $\lim_{z \to \infty} e^z$.

21. **Funciones Trigonométricas**

i) Calcular las derivadas de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$.

ii) Comprobar que $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$ y que $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$.

iii) Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$, ¿están acotadas?

iv) Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π.

v) Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

22. **Función Raíz Cuadrada**
Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de raíz cuadrada de* z, rama de $\sqrt{z}$, en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $(g(z))^2 = z$ para todo $z \in \Omega$.

i) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Definirlas.

ii) Probar que toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa.

iii) Si Ω es conexo y f es una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

23. **Función Logaritmo**

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de* z, rama de $\log z$, en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

i) Sea $U \subseteq \mathbb{C}^*$ un abierto conexo y $g_1, g_2 : U \to \mathbb{C}$ dos ramas de logaritmo de z en U. Si existe $z_0 \in U$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, probar que $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in U$.

ii) Calcular todos los posibles logaritmos de i, -1, $1+i$ y $e^{\log i}$.

24. Sean $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $z^b = e^{b \cdot g(z)}$ y $a^z = e^{z \cdot g(a)}$.

i) ¿Los valores de z^b y a^z están bien definidos?

ii) Fijando una rama del logaritmo, demostrar que z^b y a^z son funciones holomorfas.

iii) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, z^b está bien definida y coincide con $\underbrace{z \cdot z \cdots z}_{b \text{ veces}}$.

iv) Calcular i^i considerando la rama principal del logaritmo. Hallas los demás valores considerando las restantes ramas. Idem para $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^{π}.

v) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?

25. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ y $\alpha = ki$, con $k \in \mathbb{N}$.

i) Probar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe una rama holomorfa de $(z^2+1)^{\alpha}$ definida en Ω tal que $f(0) = 1$. Calcular su derivada.

ii) ¿Es cierto que $(z^2+1)^{\alpha} = \left((z^2+1)^i\right)^k = \left((z^2+1)^k\right)^i$?