

# ANÁLISIS COMPLEJO

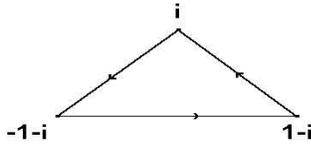
Segundo Cuatrimestre 2004

## Práctica 4

1. Calcular

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz \text{ para } \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma(t) = e^{it}$$

$$\int_{\gamma} |z|^2 z dz \text{ para } \gamma :$$



2. Calcular  $\int_{\gamma} (z - a)^n dz$  si  $n$  es un entero distinto de  $-1$  y  $\gamma : |z - a| = r$ .

3. Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva. Notamos por  $-\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  a la curva  $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$ . Probar que  $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$ .

4. Sea  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $T(z) = az + b$  con  $a \neq 0$ . Dadas una curva  $\gamma$  y  $c \notin \gamma$ , probar que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - c} = \int_{T \circ \gamma} \frac{dz}{z - T(c)}$$

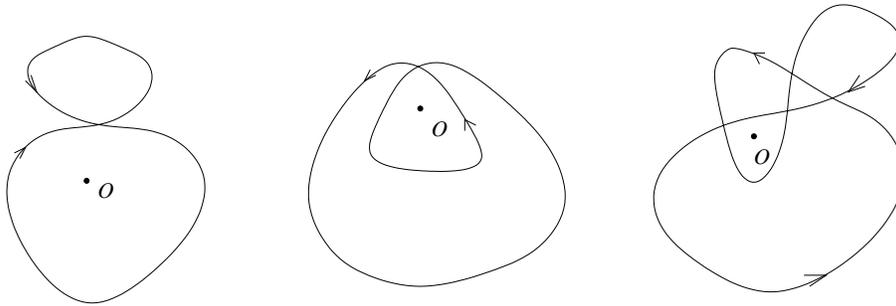
5. Sea  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\gamma(t) = a + re^{it}$ . Probar que  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - b} = 2\pi i$  para todo  $b \in B(a, r)$ .

6. Sea  $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $\gamma_r(t) = re^{it}$ . Probar que  $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ .

7. Probar que si  $d(a, b) > r$  entonces  $\int_{|t-a|=r} \frac{dz}{z-b} = 0$ .

8. Calcular  $\int_{\gamma} \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3} dz$  siendo  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  la curva  $\gamma(t) = \frac{2}{3}e^{it}$ .

9. Evaluar  $\int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz$  siendo  $\gamma$  alguna de las siguientes curvas:



10. Encontrar todos los posibles valores de  $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$ , donde  $\gamma$  es una curva diferenciable cerrada que no pasa por  $\pm i$ .

11. Sea  $\gamma$  la curva cuya imagen es la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  parametrizada por  $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Calcular  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  y deducir que  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$ .

12. Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva cerrada diferenciable a trozos. Sea  $\varphi : Im\gamma \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua y  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(z) = \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$ .

Probar que:

i)  $g$  es continua.

ii) Si para todo  $w \in Im\gamma$ , la función  $\varphi(w, -) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y además

$\frac{\partial \varphi(w, z)}{\partial z}$  resulta continua en  $w$  y  $z$ , entonces  $g$  es holomorfa y  $g'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(w, z)}{\partial z} dw$ .

13. Sean  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva diferenciable a trozos y  $f : Im\gamma \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua. Definimos  $\varphi : Im\gamma \times (\mathbb{C} \setminus Im\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\varphi(w, z) = \frac{f(w)}{w-z}$  y  $g : \mathbb{C} \setminus Im\gamma \rightarrow \mathbb{C}$  por  $g(z) = \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$ . Probar que  $g$  es holomorfa y  $g^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$ .

14. Sea  $\gamma$  una curva como en el ejercicio anterior.

Probar:

i)  $\eta(\gamma, a) = -\eta(-\gamma, a)$  donde  $-\gamma : [-\beta, -\alpha] \rightarrow \mathbb{C}$  se define por  $-\gamma(t) = \gamma(-t)$ .

ii)  $\eta(\gamma, a) = 0$  para todo  $a \notin \Delta = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \max|\gamma|\}$ .

iii)  $\eta(\gamma, a)$  es constante como función de  $a$  en cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \text{Im}\gamma$ .

15. Sea  $k$  un entero no nulo. Calcular

$$\int_{\gamma_k} \left( \frac{z}{z+1} \right)^n dz \quad \gamma_k(t) = 1 + e^{ikt} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_{\gamma_k} \frac{\text{sen } z}{z^3} dz \quad \gamma_k(t) = e^{ikt} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

16. Sea  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Demostrar que si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  en una curva  $\gamma \subseteq A$  entonces  $\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$ .

17. Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  en  $B$  para todo compacto  $B$  de  $A$  (notar que  $f_n$  puede no tender uniformemente a  $f$  en  $A$ ). Probar que si  $f_n$  es holomorfa en  $A$  para todo  $n \geq n_0$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $A$  y  $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} f'$  en  $B$  para cada compacto  $B$  de  $A$ .

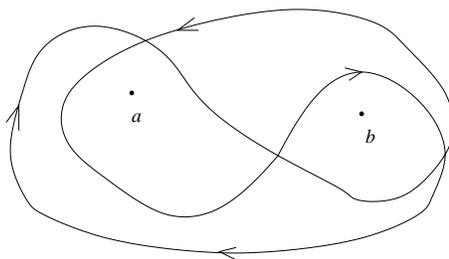
18. Probar que  $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt$  es una función holomorfa en  $\text{Re}(z) > 0$ .

19. Probar que si  $f(z)$  es *continua* en el disco cerrado  $|z| \leq r$  y holomorfa en el disco abierto  $|z| < r$ , se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

para todo  $|z| < r$ .

20. Sea  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ ,  $a \neq b$ , y sea  $\gamma$  la curva en la siguiente figura:



i) Mostrar que  $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$ .

ii) Convencerse de que  $\gamma$  no es homotópica a cero.

**Definición:** Dado un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , decimos que una curva  $\gamma$  contenida en él es *homóloga a cero* si  $\eta(\gamma, w) = 0$  para todo  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ .

iii) Probar que  $\gamma$  es homóloga a cero en  $\Omega$ .