Análisis Complejo

Práctica N°3.

1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

   (i) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$, (ii) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$, (iii) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$,

   (iv) $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, (v) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Demostrar que la serie de término general $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$, $n \geq 2$,

   (a) converge si $q > 0$ y $p > 1$, (b) converge si $q > 1$ y $p = 1$,

   (c) diverge si $q > 0$ si $p < 1$, (d) diverge si $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

3. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencia:

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$, (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n^2} z^n$,

   (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n$, (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}$, (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

4. **Criterio de Weierstrass.** Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

5. Sean $(a_n)_{n\geq 0}$, $(Z_n)_{n\geq 0}$ sucesiones de números complejos tales que $(a_n Z_n)_{n\geq 0}$ converge. Demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) Z_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (Z_n - Z_{n-1}) \text{ converge.}$$

6. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(z_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de números complejos.

   (a) **Criterio de Dedekind.** Demostrar que si $\lim a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\sum_{n=1}^{k} z_n\right| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

   (b) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

   (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

7. **Criterio de Dirichlet.** Sea $(r_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\lim r_n = 0$ y $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesion de números complejos. Demostrar que si las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n$ converge. (Sugerencia: usar el criterio de Dedekind.)

8. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$, (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n$, (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n$, (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n$, (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$, (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,

(x) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n \, z^n$, (xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.

9. Hallar los valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$, (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}$, (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{nz^n}$, (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$,

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$, (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$, (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right)^n$, $|\alpha| < 1$.

10. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ son iguales.

11. Probar que si el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ es también ρ para todo $k \in \mathbb{N}$.

12. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

(i) $e^z \operatorname{sen} z$, (ii) $\operatorname{sen} z \cos z$, (iii) $\dfrac{e^z - 1}{z}$,

(iv) $\dfrac{e^z - \cos z}{z}$, (v) $\dfrac{1}{\cos z}$, (vi) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$.

13. Para $n \in \mathbb{N}$, hallar el desarrollo en serie de potencias de la funcion $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$. (Sugerencia: $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$.)

14. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Se dice que $f(z)$ es *par* (*impar*) si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que

- f es par sii $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$,
- f es impar sii $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$.

15. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

(a) Probar que $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en un entorno del origen, y la función $R(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $R(z)$.

(b) Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.

(c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

Funciones exponencial, trigonométricas, logartimo y raíces n-ésimas

16. Sea $f(z) = e^z$.

    (a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$.

    (b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.

    (c) Mostrar que la imagen de la recta $\{z = t + it, \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral.

17. (a) Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

    (b) Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π.

    (c) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \in \mathbb{R}$ y los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$.

    (d) Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

    (e) Hallar todas las soluciones de la ecuación $\cos z = 2$.

18. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de* z en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

    (a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.

    (b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω. Demostrar que si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.

    (c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω, entonces $S^1 \not\subseteq \Omega$.

19. Sean $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.

    (a) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.

    (b) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.

    (c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \to \mathbb{C}$, $h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.

    (d) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?

20. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de la raíz n-ésima de* z en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.

    (a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Definirlas.

    (b) Probar que toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa.

    (c) Si Ω es conexo y f es una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

21. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $z^{1/3}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $z^{1/3} = e^{g(z)/3}$.

    (a) Demostrar que para toda rama g, $z^{1/3}$ pertenece a Ω para todo z en Ω.

    (b) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(z^{1/3}) = \frac{1}{3} g(z)$ para todo z en Ω.