

## ANÁLISIS COMPLEJO

### Práctica N°7.

#### Sucesiones de funciones holomorfas

**Notación:** Sea  $\mathcal{D}$  un abierto conexo de  $\mathbb{C}$ .

- $\mathcal{O}(\mathcal{D}) := \{f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$ ,
- $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\mathcal{D})$  si  $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ ,  $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$  y para todo compacto  $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ ,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $\mathcal{K}$ .
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$  es *acotado* si para todo compacto  $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$  existe  $M_{\mathcal{K}}$  tal que  $\|f\|_{\mathcal{K}} \leq M_{\mathcal{K}}$  para toda  $f \in \mathcal{A}$ .

1. Sea  $P_n(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!}$ . Demostrar que dado  $R > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  vale que  $P_n$  no tiene ceros reales de módulo menor que  $R$ .

2. (a) Probar que la función *gamma*, definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

es holomorfa en  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

- (b) Probar que

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log(t) dt.$$

3. (a) Sea  $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$  un conjunto compacto. Si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $\mathcal{K}$  y  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathcal{K}$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$   $f_n$  no se anula en  $\mathcal{K}$  y además  $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$  uniformemente en  $\mathcal{K}$ .
- (b) Si además  $g_n \rightarrow g$  uniformemente en  $\mathcal{K}$ , probar que  $f_n g_n \rightarrow f g$  uniformemente en  $\mathcal{K}$ .
- (c) Sea  $\gamma$  una curva simple cerrada incluida en  $\mathcal{D}$  y  $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$  tal que  $f$  no se anula sobre  $\gamma$ . Si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ , la cantidad de ceros de  $f_n$  en  $\operatorname{Int}(\gamma)$  es igual a la cantidad de ceros de  $f$  en  $\operatorname{Int}(\gamma)$ .
4. Sea  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\mathcal{D})$  con  $f \neq 0$ . Si existe  $a \in \mathcal{D}$  tal que  $f(a) = 0$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_0$  existe  $a_n \in \mathcal{D}$  de modo que  $a_n \rightarrow a$  y  $f_n(a_n) = 0$  para todo  $n \geq n_0$ .
5. Sea  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\mathcal{D})$  y  $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}$  tal que  $z_n \rightarrow z \in \mathcal{D}$ . Probar que  $f_n(z_n) \rightarrow f(z)$ .
6. Probar que  $\left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$  converge a  $e^z$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ .

7. Probar que si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ , entonces  $e^{f_n} \rightarrow e^f$  en  $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ .
8. Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto acotado en  $\mathcal{O}(\mathcal{D})$  y sea  $\mathcal{A}' = \{f' \mid f \in \mathcal{A}\}$ . Probar que  $\mathcal{A}'$  es acotado.

### Sucesiones de funciones meromorfas

9. (a) Demostrar que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left( \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2.$$

(Sugerencia: observar que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en  $\mathbb{C}$ , periódicas de período 1, con polos de orden 2 en los todos los enteros  $n$ , en los que la parte singular es  $\frac{1}{(z-n)^2}$ . Notar que, por lo tanto, la diferencia entre ambos miembros es una función con únicamente singularidades evitables. Probar que esta función es acotada.)

(b) Calcular  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

10. Probar que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cotg(\pi z).$$

11. Sea  $f(z)$  una función meromorfa con polos simples en los puntos  $a_1, \dots, a_n, \dots$ , con  $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . Sea  $A_n$  el residuo de  $f(z)$  en cada polo  $a_n$ .

(a) Probar que existe una sucesión  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$  y  $f$  no tiene singularidades sobre  $\{|z| = r_n\}$ .

(b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{|z|=r_n\}} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \rightarrow 0$ , probar que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

(Sugerencia: calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=r_n\}} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw$ .)