

ANÁLISIS COMPLEJO

Práctica N°1.

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| (i) $(i+1)(i-1)(i+3)$, | (ii) $(3-2i)^2$, | (iii) $\frac{1}{-1+3i}$, |
| (iv) $\frac{1+i}{i}$, | (v) $\frac{2+i}{2-i}$, | (vi) $(1+i)^{100}$, |
| (vii) $(1+i)^{65} + (1-i)^{65}$. | | |

2. Sean z y w dos números complejos. Demostrar que:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\bar{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$, | (b) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, | (c) $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$, |
| (d) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, | (e) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. | |

3. Probar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, entonces $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\bar{a}_n X^n + \bar{a}_{n-1} X^{n-1} + \dots + \bar{a}_0 = 0$. Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

4. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3-i)z - (1+2i) = 0$.

5. Para $z \in \mathbb{C}$, se define $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Probar que:

- (a) Si $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- (b) $|zw| = |z||w|$ y si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
- (c) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$,
- (d) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})$ y $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})$,
- (e) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$,
- (f) $|z+w| \leq |z| + |w|$ y $|z-w| \geq |z| - |w|$.

Interpretar geoméricamente la propiedad (e), también conocida como “Ley del paralelogramo”.

6. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica.

7. Sea $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ y $c > 0$. Para $z = x + iy$, transformar la condición $|z - \alpha| = c$ en una ecuación que involucre solo a x, y, a, b y c ; describir qué figura geométrica representa esta ecuación.

8. Describir geoméricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

- | | |
|--|--|
| (i) $ z - i + 3 = 5$, | (ii) $ z - i + 3 \leq 5$, |
| (iii) $\operatorname{Re}(2z + 3) \geq 0$ | (iv) $\operatorname{Re}((1 + 2i)z) \geq 0$. |

9. **Definición:** Para $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$, se define $e^z = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$.

- (a) Demostrar que para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $e^{w+z} = e^w e^z$.
- (b) Describir los z tales que $e^z = 1$.
- (c) Demostrar que si $e^z = e^w$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$.
- (d) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

10. (a) Pasar de la forma $a + ib$ a la forma polar:

$$(i) \quad 1 + i, \quad (ii) \quad -5i, \quad (iii) \quad -3.$$

(b) Pasar de la forma polar a la forma $a + ib$:

$$(i) \quad 3e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad (ii) \quad e^{-i\pi}, \quad (iii) \quad \pi e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

11. (a) Para $n = 2, 3, 4, 5$, dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que hay n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

12. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

- (a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$.
- (b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.
- (c) Mostrar que la imagen de la recta $\{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral.

13. (a) Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Mostrar que $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

(b) Generalizando las igualdades del ítem anterior, se define para $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos^2(z) + \operatorname{senz}^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{senz}.$$

- (c) Mostrar que senz y $\cos z$ tienen período 2π .
- (d) Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0$ y $\operatorname{senz} = 0$ son los valores reales usuales.
- (e) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{senz}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{senz}(z)}$.

14. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \in \mathbb{R}$ y los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{senz} \in \mathbb{R}$.

15. (a) Probar que $\cos z$ y senz son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

(b) Hallar todas las soluciones de la ecuación $\cos z = \frac{5}{4}$.

16. Sean $a, b, b' \in \mathbb{R}$. Probar que si $|b| < |b'|$, entonces $|\cos(a + bi)| < |\cos(a + b'i)|$ y $|\operatorname{sen}(a + bi)| < |\operatorname{sen}(a + b'i)|$.

17. Sea $z \neq 1$. Probar que $1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$. Para $0 < \theta < 2\pi$, dar una fórmula para la suma $1 + \cos \theta + \cdots + \cos n\theta$.

18. Demostrar que para todo par de números reales positivos a, b , vale que

$$\arctan\left(\frac{1}{a+b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a^2 + ab + 1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Sucesiones

19. (a) Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$.
 (b) Dar un ejemplo donde no valga la recíproca.
20. (a) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n$? Repetir para $|\alpha| > 1$.
 (b) Si $|\alpha| < 1$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha + \cdots + \alpha^n) = \frac{1}{1 - \alpha}$.
21. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \frac{1}{n} \left(\frac{1+i}{2} \right)^n, & \text{(ii)} \quad n \left(\frac{1+i}{2} \right)^n, & \text{(iii)} \quad \cos(n\pi) + i \frac{\sin(\frac{n}{2})}{n^2}, \\ \text{(iv)} & \left(\frac{(-1)^n + 1}{3} \right)^n, & \text{(v)} \quad ni^{2n+1}. \end{array}$$

22. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los números complejos c tales que la sucesión definida de manera recursiva del siguiente modo:

$$z_0 = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

resulta acotada. Demostrar que $\mathcal{M} \subset \{|z| \leq 2\}$.

Plano Complejo ampliado - Esfera de Riemann

23. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S = S^2$ (la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 1 y centro en $(0, 0, 0)$). Sea $N = (0, 0, 1) \in S$, definimos la proyección estereográfica $\theta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ haciendo $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ sii $(a, b, 0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.

- (a) Probar que $\theta(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.
 (b) Probar que θ es una biyección y su inversa φ está dada por

$$\varphi(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right).$$

- (c) Calcular $\varphi(\operatorname{Re}(z) = 0)$ y $\varphi(\operatorname{Im}(z) = 0)$.

24. Sea $\bar{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ , es decir, si $z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\bar{d}(z, z') = d(\varphi(z), \varphi(z'))$ donde d es la distancia euclídea.

- (a) Verificar que $\bar{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que, restringida a $\mathbb{C}$, $\bar{d}$ resulta equivalente a la métrica usual (probando, por ejemplo, que $(\mathbb{C}, \bar{d})$ y $(\mathbb{C}, d_{\text{usual}})$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

- (b) Para $z, w \in \mathbb{C}$, verificar que $\bar{d}(z, w) = \frac{2|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ y $\bar{d}(z, \infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

- (c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \bar{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

25. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta y, en caso contrario, una circunferencia.

Homografías

Definición: Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

26. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.
27. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2 , z_3 en w_3 y z_4 en w_4 .
28. (a) Hallar homografías que transformen
- i. los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;
 - ii. los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.
- (b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primer homografía del ítem anterior es la recta $\{\operatorname{Re}(z) = 1\}$.
29. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1}$$

transforma a la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en si misma y a α en 0 ($|\alpha| \neq 1$).

30. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ no singulares que representan las homografías T_1 y T_2 respectivamente.
- (a) ¿Qué homografía representa la matriz AB ?
 - (b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1} ?
 - (c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?
 - (d) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?
31. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si se puede escribir con coeficientes reales.
32. **Definición:** Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Observar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

- (a) Probar que si $T \in \mathcal{H}$ entonces $(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.
- (b) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 están en una recta o circunferencia si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

33. **Definición:** Sea C una recta o circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de C . Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto de C si $(z, z_2, z_3, z_4) = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.
- (a) Probar que la definición anterior no depende de los puntos elegidos z_2, z_3, z_4 sino de C .
- (b) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de C . A la aplicación que a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna su simétrico respecto de C se la llama *simetría respecto de C* . Probar que para cada homografía T que aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en C , la función
- $$T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$
- es la simetría respecto de C .
- (c) Probar que si S es una homografía y z, z^* son simétricos respecto de una recta o circunferencia C , entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.
34. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia C (respecto a C) es ∞ .
35. Probar que en caso en que C sea una recta, esta nueva noción de simetría coincide con la simetría usual.
36. Dados tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$, demostrar que existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y hace que z_2 y z_3 sean simétricos.
37. Hallar homografías que transformen
- (a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z + 1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i ;
- (b) el semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\text{Im}(\alpha) > 0$).
38. Sea $S(z) = \frac{7z+15}{-2z-4}$. Sea $z_1 = 1$ y $z_n = S(z_{n-1})$ para $n \geq 2$. Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.