

PRÁCTICA 3

SERIES

1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

$$(i) \quad a_n = \frac{n+1}{2n+1}, \quad (ii) \quad a_n = \frac{n}{2n^2+3}, \quad (iii) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}},$$

$$(iv) \quad a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (v) \quad a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Demostrar que la serie de término general $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$, $n \geq 2$,

$$(a) \quad \text{converge si } q > 0 \text{ y } p > 1, \quad (b) \quad \text{converge si } q > 1 \text{ y } p = 1,$$

$$(c) \quad \text{diverge si } q > 0 \text{ si } p < 1, \quad (d) \quad \text{diverge si } 0 < q \leq 1 \text{ y } p = 1.$$

3. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencia:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{34^n}} z^n, \quad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n, \quad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} z^n,$$

$$(iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n, \quad (v) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}, \quad (vi) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

4. **Criterio de Weierstrass.** Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

5. Sean $(a_n)_{n \geq 0}$, $(Z_n)_{n \geq 0}$ sucesiones de números complejos tales que $(a_n Z_n)_{n \geq 0}$ converge. Demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) Z_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (Z_n - Z_{n-1}) \text{ converge}.$$

6. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(z_n)_{n \geq 1}$ sucesiones de números complejos.

a) **Criterio de Dedekind.** Demostrar que si $\lim a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\sum_{n=1}^k z_n| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

b) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

(Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

7. **Criterio de Dirichlet.** Sea $(r_n)_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\lim r_n = 0$ y $(z_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos. Demostrar que si las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n$ converge. (Sugerencia: usar el criterio de Dedekind.)

8. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, & \text{(ii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n, & \text{(iii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n, \\
 \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n, & \text{(v)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n, & \text{(vi)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)^{n^2}} z^n, \\
 \text{(vii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n, & \text{(viii)} & \sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}, & \text{(ix)} & \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \\
 \text{(x)} & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n z^n, & \text{(xi)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}.
 \end{array}$$

9. Hallar los valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}, & \text{(ii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}, & \text{(iii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}, \\
 \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}, & \text{(v)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}, & \text{(vi)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}, \\
 \text{(vii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}, & \text{(viii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n, & \text{(ix)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}\right)^n, \quad |\alpha| < 1.
 \end{array}$$

10. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ son iguales.

11. Probar que si el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ es también ρ para todo $k \in \mathbb{N}$.

12. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & e^z \operatorname{sen} z, & \text{(ii)} & \operatorname{sen} z \cos z, & \text{(iii)} & \frac{e^z - 1}{z}, \\
 \text{(iv)} & \frac{e^z - \cos z}{z}, & \text{(v)} & \frac{1}{\cos z}, & \text{(vi)} & \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.
 \end{array}$$

13. Para $n \in \mathbb{N}$, hallar el desarrollo en serie de potencias de la función $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$. (Sugerencia: $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$.)

14. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Se dice que $f(z)$ es *par (impar)* si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que

- f es par sii $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$,
- f es impar sii $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$.

15. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

- a) Probar que $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en un entorno del origen, y la función $R(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $R(z)$.
- b) Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.
- c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el n -ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

LOGARITMO Y RAÍCES n -ÉSIMAS

16. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un abierto conexo. Llamamos *rama del logaritmo de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.
 - a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω .
 - b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω . Demostrar que si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.
 - c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω , entonces $S^1 \not\subseteq \Omega$.
17. Sean $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.
 - a) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_b$. b veces
 - b) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i , $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.
 - c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.
 - d) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?
18. Sea \log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{arctg}(t) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-t}{i+t} \right).$$
19. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de la raíz n -ésima de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.
 - a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de \sqrt{z} en Ω . Definirlas.
 - b) Probar que toda rama de \sqrt{z} es holomorfa.
 - c) Si Ω es conexo y f es una rama de \sqrt{z} en Ω , entonces f y $-f$ son todas las ramas.
20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.

- a) Demostrar que para toda rama g , $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω .
- b) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω .
- c) Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el item (b).