

## PRÁCTICA 2

## ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

1. Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Probar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib \iff \left( \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = a \text{ y } \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = b \right).$$

2. Sean  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sean  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , tales que  $f$  es derivable en  $z_0 = a + ib$ .

a) Probar que  $g$  es diferenciable en  $(a, b)$ .

b) Calcular

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \text{ y } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

en términos de  $u$  y  $v$ . ¿Qué se deduce?

c) ¿Qué relación hay entre  $|f'(z_0)|$  y el jacobiano de  $Dg(a, b)$ ?

3. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

Verificar que  $f$  es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

4. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de  $z = x + iy$ . Hallar  $f'(z)$  en cada caso:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $f(z) = y + ix,$                               | (b) $f(z) = \bar{z},$  |
| (c) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy),$ | (d) $f(z) = x^2 + iy^2,$   |
| (e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$ | (f) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x),$  |
| (g) $f(z) = z^3 - 2z,$                             | (h) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z},$  |
| (i) $f(z) = \frac{z+1}{1-z},$                      | (j) $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$ |

5. Una función  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de tipo  $\mathcal{C}^2$  es *armónica* si verifica  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ . A su vez,  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una *conjugada armónica* de  $u$  si la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  es holomorfa.

a) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son  $\mathcal{C}^2$ , entonces son armónicas. Deducir que si  $u$  es una función  $\mathcal{C}^2$  que admite una conjugada armónica, entonces  $u$  es armónica.

- b) Probar que si  $v$  y  $\tilde{v}$  son conjugadas armónicas de  $u$ , entonces  $v$  y  $\tilde{v}$  difieren en una constante.
- c) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:
- (i)  $u_1(x, y) = x^2 - y^2$ ,      (ii)  $u_2(x, y) = x^2 y^2$ ,      (iii)  $u_3(x, y) = 2x(1 - y)$ .
- d) Probar que si  $v$  es conjugada armónica de  $u$ , las curvas de nivel de  $u$  y  $v$  se cortan de manera ortogonal.
6. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  una región (es decir, un subconjunto de  $\mathbb{C}$  abierto, conexo y no vacío).
- a) Probar que para todos  $z_0$  y  $z_1$  en  $\Omega$  existe una curva  $\gamma$ ,  $\mathcal{C}^1$  a trozos, tal que  $\gamma(0) = z_0$  y  $\gamma(1) = z_1$ .
- b) Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $f' \equiv 0$  en  $\Omega$ , probar que  $f$  es constante.
7. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Demostrar:
- (a)  $\operatorname{Re}(f)$  cte  $\Rightarrow f$  cte,      (b)  $\operatorname{Im}(f)$  cte  $\Rightarrow f$  cte,  
(c)  $|f|$  cte  $\Rightarrow f$  cte,      (d)  $\arg(f)$  cte  $\Rightarrow f$  cte,  
(e)  $\bar{f}$  holomorfa  $\Rightarrow f$  cte.
8. Sean  $L_1, \dots, L_n \subseteq \mathbb{R}^2$  (o  $\mathbb{C}$ )  $n$  rectas distintas. Probar que si  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y  $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$  entonces  $g$  es constante.
9. Sea  $\Omega$  un abierto simétrico respecto del eje real y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Probar que la función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  es holomorfa.
10. Hallar todas las funciones holomorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $f'(0) = 1$  y para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  se verifica que
- $$f(x + iy) = e^x f(iy).$$
- (Sugerencia: definiendo  $c, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(iy) = c(y) + is(y)$ , probar que  $c' = -s$  y que  $s' = c$ .)
11. Hallar todas las funciones holomorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  se verifica que
- $$f(x + iy) = f(x) - f(y) + 2xyi.$$
12. **Regla de L'Hospital.** Sean  $f, g$  funciones holomorfas en  $z_0$  tales que  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  y  $g'(z_0) \neq 0$ . Entonces:
- $$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$
- (Sugerencia:  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$  con  $\lim_{z \rightarrow z_0} \eta(z) = 0$ .)

13. Calcular:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}, & \text{(ii)} \quad & \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}, \\ \text{(iii)} \quad & \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z-e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3+1}, & \text{(iv)} \quad & \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}. \end{aligned}$$

14. Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una curva  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $v = \gamma'(t_0)$  el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a la curva en  $t = t_0$ . Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y sea  $z = f'(\gamma(t_0))$ . Mostrar que  $zv$  es el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a la curva  $f \circ \gamma$  en  $t = t_0$ .
15. Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas por  $\gamma_1(t) = t$  y  $\gamma_2(t) = (1+i)t$ . Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4$ . Calcular en qué ángulo se cortan las curvas  $f \circ \gamma_1$  y  $f \circ \gamma_2$  en  $t = 0$ .