PRÁCTICA 5

FÓRMULA DE CAUCHY

1. Sea f entera y R un número real positivo tal que $|f(z)| \leqslant M|z|^n$ para todo z tal que $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

2. Hallar todas las funciones enteras tales que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 5$.

3. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica no suryectiva.
   - Probar que u está acotada superior o inferiormente.
   - Probar que u es constante (por lo tanto, toda función armónica es constante o suryectiva).

4. Sea f entera tal que existen dos números complejos, z_0 y z_1, $\mathbb{R}$-linealmente independientes, tales que $f(z + z_0) = f(z)$ y $f(z + z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

5. *a*) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f \not\equiv 0$. Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z - a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

   b) Con las hipótesis del ítem anterior, suponiendo además que Ω es un abierto *conexo*, verificar que el conjunto de ceros de f es discreto. Deducir que en todo compacto de Ω, f tiene sólo un número finito de ceros.

6. *a*) ¿Existe f holomorfa en $B(0, 1)$ tal que $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

   b) ¿Existe f holomorfa en $B(0, 1)$ tal que $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3-2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}, n > 1$?

7. Hallar todas las funciones enteras tales que para todo $n \in \mathbb{N}$,
$$n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^3 + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ vale que $f(z) \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ vale que
$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

9. Sea $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}, f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es holomorfa en $B(0, 1)$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $B(0, 1)$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?

10. Sean Ω un abierto conexo del plano complejo y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas que no se anulan en Ω. Si existe una sucesión $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de puntos de Ω tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega$, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

probar que existe una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω.

11. Demostrar que si Ω es un abierto conexo del plano complejo, f y g son holomorfas en Ω y $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.

12. Sea Ω un abierto acotado y conexo y consideremos n puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \ldots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P en $\overline{\Omega}$ a los puntos $P_1, \ldots, P_n$ alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω.

13. Sea f entera tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leqslant |e^z - \frac{1}{2}|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

14. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua, holomorfa en Ω y no constante tal que $|f(z)| = \text{cte}$ para todo $z \in \partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

15. Formular y demostrar el "principio de módulo mínimo" para funciones holomorfas.

16. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa. Probar que si existen dos números complejos distintos a y b tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo z en $B(0,1)$. (Sugerencia: considerar la función

$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)}, \quad \text{con} \quad h(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)$$

y usar el Lema de Schwarz.)

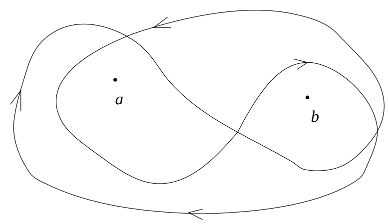
17. Sean $f, g : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfas y biyectivas. Probar que si f y g coinciden en dos puntos distintos de $B(0,1)$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en $B(0,1)$.

18. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(1,4)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 3$ y $f(\frac{1}{2}) = 1$.

19. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$ para todo z en $B(0,1)$.

20. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(0,2)$ que verifican simultáneamente $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$.

21. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



- Ver que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.
- *Convencerse* de que γ no es homotópica a cero en Ω.

22. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?

23. *a*) Sea Ω un abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$. (Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g} f$ es constante.)

    b) Demostrar que tal g es única.

    c) Decidir si en las condiciones del ítem (a), vale que para todos $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow g(z_1) = g(z_2)$.

    d) ¿Es necesaria la hipótesis de “simplemente conexo.$^{\text{en}}$ el ítem (a)?

24. Sean f y g dos funciones enteras. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \operatorname{sen}(h(z))$. (Sugerencia: notar que $1 = (f + ig)(f - ig)$, luego $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.)