PRÁCTICA 7

SUCESIONES DE FUNCIONES

SUCESIONES DE FUNCIONES HOLOMORFAS

Notación: Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

- $\mathcal{O}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$,
- $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ si $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{O}(\Omega)$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y para todo compacto $K \subset \Omega$, $f_n \to f$ uniformemente en K.
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ es *acotado* si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe M_K tal que $\|f\|_K \leqslant M_K$ para toda $f \in \mathcal{A}$.

1. Sea $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ y $(z_n)_{n\geqslant 1} \subset \Omega$ tal que $z_n \to z \in \Omega$. Probar que $f_n(z_n) \to f(z)$.
2. Probar que si $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$, entonces $e^{f_n} \to e^f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$.
3. Sea $P_n(z) = 1 + \dfrac{z}{2!} + \cdots + \dfrac{z^n}{(n+1)!}$. Demostrar que dado $R > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale que P_n no tiene ceros reales de módulo menor que R.
4. *a*) Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Si $f_n \to f$ uniformemente en K y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in K$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ f_n no se anula en K y además $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ uniformemente en K.

   b) Si además $g_n \to g$ uniformemente en K, probar que $f_n g_n \to fg$ uniformemente en K.

   c) Sea γ una curva simple cerrada incluída en Ω y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que f no se anula sobre γ. Si $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$, la cantidad de ceros de f_n en $\mathrm{Int}(\gamma)$ es igual a la cantidad de ceros de f en $\mathrm{Int}(\gamma)$.
5. Sea $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ con $f \not\equiv 0$. Si existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant n_0$ existe $a_n \in \Omega$ de modo que $a_n \to a$ y $f_n(a_n) = 0$ para todo $n \geqslant n_0$.
6. **Función Gamma**

   a) Probar que la función *gamma*, definida por
   $$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$
   es holomorfa en $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

b) Probar que

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log(t) dt.$$

c) Probar que $\Gamma(1) = 1$ y que para todo $z \in \{\mathrm{Re}(z) > 0\}, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Deducir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

7. Probar que si $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$, entonces $\{f_n\}$ es un conjunto acotado en $\mathcal{O}(\Omega)$.

8. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto acotado en $\mathcal{O}(\Omega)$ y sea $\mathcal{A}' = \{f' \mid f \in \mathcal{A}\}$. Probar que $\mathcal{A}'$ es acotado.

9. Probar que $\{(1 + \frac{z}{n})^n\}_{n \geqslant 1}$ converge a e^z en $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Sucesiones de funciones meromorfas

---

10. *a*) Demostrar que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2.$$

Sugerencia:

- Observar que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, periódicas de período 1 y con polos de orden 2 en los todos los enteros.
- Verificar además, que en cada entero n, la parte singular de cada una de las funciones es $\frac{1}{(z-n)^2}$. Notar que, por lo tanto, la diferencia entre ambos miembros es una función cuyas únicas singularidades resultan evitables.
- Para finalizar, probar que esta diferencia es una función acotada.

b) Utilizando el item anterior, calcular los valores de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

11. Probar que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotg}(\pi z).$$

12. Sea $f(z)$ una función meromorfa con polos simples en los puntos $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. Sea A_n el residuo de $f(z)$ en cada polo a_n.

a) Probar que existe una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\lim_{n \to \infty} r_n = +\infty$ y f no tiene singularidades sobre $\{|z| = r_n\}$.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \sup_{\{|z|=r_n\}} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \to 0$, probar que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$

(*Sugerencia:* calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z|=r_n\}} \frac{f(w)}{w(w-z)}dw$.)