Análisis Complejo
Primer Cuatrimestre — 2009

Primer parcial — Recuperatorio

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Páginas: ....

---

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado, sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y supongamos que existe una constante $M \geq 0$ que satisface la siguiente condición:

> si $(z_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente de puntos de Ω tal que $\lim_{n\to\infty} z_n \in \partial\Omega$, entonces $\limsup_{n\to\infty} |f(z_n)| \leq M$.

Entonces para todo $z \in \Omega$ es $|f(z)| \leq M$.

2. ¿Existe una función $f : B_2(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$?

3. Sea $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $|f(z^2)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in B_1(0)$. Entonces f es constante.

4. Sea $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa, y sea $\delta = \sup_{z,w\in B_1(0)} |f(z) - f(w)|$ el diámetro de la imágen de f. Muestre que si $r \in (0,1)$ es

$$2f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} \, \mathrm{d}z$$

y, usando esto, que $2|f'(0)| \leq \delta$.

5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto tal que $\overline{B}_1(0) \subset \Omega$.

(a) Una función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que no se anula y tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$ es constante.

Sugerencia. Muestre que f puede extenderse analíticamente a $\mathbb{C}$ poniendo $f(z) = 1 \,/\, \overline{f(1/\overline{z})}$ si $|z| > 1$.

(b) Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ siempre que $|z| = 1$, entonces f es constante.

6. Calcule

$$\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3} \, \mathrm{d}z$$

con $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to \frac{2}{3}e^{it} \in \mathbb{C}$.