Análisis Complejo
Primer Cuatrimestre — 2009
Segundo parcial — Recuperatorio

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Páginas: ....

---

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa con polos simples y residuos enteros. Entonces existe una función meromorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f = g'/g$.

Solución. Supongamos que $A = \{\alpha_i : i \in I\}$ es el conjunto de polos de f y, para cada $i \in I$, sea m_i el residuo de f en α_i. El conjunto A es discreto, así que del teorema de Weierstraß sabemos que sabemos que existen polinomios $p_i \in \mathbb{C}[z]$, para cada $i \in I$, de manera que los productos

$$g(z) = \prod_{\substack{i \in I \\ m_i > 0}} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_i}\Big) e^{p_i(z)} \qquad \text{y} \qquad h(z) = \prod_{\substack{i \in I \\ m_i < 0}} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_i}\Big) e^{p_i(z)}$$

convergen normalmente en $\mathbb{C} \setminus A$ a funciones enteras, y allí es

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{\substack{i \in I \\ m_i > 0}} \left(\frac{m_i}{z - \alpha_i} + p_i'(z)\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{\substack{i \in I \\ m_i < 0}} \left(\frac{m_i}{z - \alpha_i} + p_i'(z)\right),$$

con las series normalmente convergentes en $\mathbb{C} \setminus A$ a funciones meromorfas. La diferencia

$$r(z) = f - \left(\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{h'(z)}{h(z)}\right)$$

es una función meromorfa con polos a lo sumo simples contenidos en A. Como claramente el residuo de f en cada elemento de A es nulo, de hecho r es una función entera. Sea R una primitiva de r, de manera que $R' = r$, y sea $k(z) = e^{R(z)}$, de manera que $k'(z)/k(z) = r(z)$. Entonces si ponemos $w(z) = g(z)k(z)/h(z)$, se trata de una función meromorfa y

$$f = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{k'(z)}{k(z)} = \frac{w'(z)}{w(z)}. \qquad \square$$

2. *(a)* Si $n \in \mathbb{N}$, entonces la ecuación

$$e^z = 3z^n$$

tiene exactamente n raíces distintas en $B_1(0)$.

(b) Determine la cantidad de raíces que el polinomio $z^5 + iz^3 - 4z + i$ tiene en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Solución. (a) Sea $f(z) = e^z - 3z^n$. Si $|z| = 1$, es

$$|(e^z - 3z^n) - (-3z^n)| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \leq e < 3 = |-3z^n|,$$

así que f y $3z^n$ tienen la misma cantidad de ceros en $B_1(0)$. Si $z_0 \in B_1(0)$ es uno de los ceros de f, de manera que $e^{z_0} = 3z_0^n$, es claro que $z_0 \neq 0$ y entonces

$$f'(z_0) = e^{z_0} - 3nz_0^{n-1} = 3z_0^n - 3nz_0^{n-1} = 3z_0^{n-1}(z_0 - n) \neq 0.$$

Esto nos dice que z_0 es un cero *simple* y prueba que f tiene n ceros distintos en $B_1(0)$.

(b) Llamemos f al polinomio y sea g el polinomio $-4z+i$. Si $|z|=1$ entonces

$$|f(z)-g(z)| = |z^5+iz^3| \le 2 < 3 \le 4|z|-1 \le |g(z)|.$$

Luego f y g tienen la misma cantidad de raíces en $B_1(0)$, a saber, una, y f no se anula sobre $\partial B_1(0)$. Por otro lado, si $|z|=2$ es

$$|f(z)-z^5| = |iz^3-4z+i| \le |iz^3|+4|z|+1 = 17 < 32 = |z^5|,$$

de manera que f y z^5 tienen la misma cantidad de raíces en $B_2(0)$ y que f no se anula sobre $\partial B_2(0)$.

Concluimos de esta forma que f tiene cuatro raíces en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. □

3. Calcule el valor principal de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x.$$

Solución. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función tal que $f(z) = \frac{z}{z^2+2z+5}$. Sea $R > 0$ y sea C_R la curva que se obtiene concatenando el segmento $[-R, R]$ con $\gamma_R : t \in [0,\pi] \mapsto Re^{it} \in \mathbb{C}$. La función $f(z)e^{i\pi z}$ es meromorfa con polos simples en $-1 \pm 2i$, y es inmediato ver que

$$\operatorname{res}(f(z)e^{i\pi z}, -1+2i) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{4}\right) e^{-2\pi}.$$

El teorema de los residuos nos dice entonces que

$$\int_{-R}^{R} f(z)e^{i\pi z}\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\, \mathrm{d}z = \left(\frac{1}{2} - i\right) \pi e^{-2\pi}. \tag{1}$$

Si $R \gg 1$, es $|Re^{it} f(Re^{it})| \le 1$, así que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\, \mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{i\pi Re^{it}} iRe^{it}\, \mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\pi} |e^{i\pi Re^{it}}|\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} e^{-\pi R \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t$$

y, como $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$ si $t \in [0,\pi]$, esta última integral vale $2\int_0^{\pi/2} e^{-\pi R \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t$. La función $t \in [0, \pi/2] \mapsto e^{-\pi R \operatorname{sen} t} \in \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, así que su máximo en $[0, 1/\sqrt{R}]$ es 1 y en $[1/\sqrt{R}, \pi/2]$ es $e^{-\pi R \operatorname{sen} 1/R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{-\pi R \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t &= \int_0^{1/\sqrt{R}} e^{-\pi R \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t + \int_{1/\sqrt{R}}^{\pi/2} e^{-\pi R \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^{1/\sqrt{R}} \mathrm{d}t + \int_{1/R}^{\pi/2} e^{-\pi R \operatorname{sen} 1/\sqrt{R}}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{R}} + e^{-\pi R \operatorname{sen} 1/\sqrt{R}}
\end{aligned}$$

y esta última expresión tiende a 0 cuando $R \to \infty$, ya que $R \operatorname{sen} 1/\sqrt{R} \sim \sqrt{R}$. Concluimos así que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\, \mathrm{d}z = 0$ y, entonces, de (1), que

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{i\pi z}\, \mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)e^{i\pi z}\, \mathrm{d}z = \left(\frac{1}{2} - i\right) \pi e^{-2\pi}.$$

Finalmente, tenemos que

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\text{v. p.} \int_{-R}^{R} f(z)e^{i\pi z}\, \mathrm{d}z\right) = -\pi e^{-2\pi}.$$

4. Sea $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y supongamos que existe $r \in (0,1)$ tal que la restricción $f|_A$ de f a $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ es inyectiva. Entonces f es inyectiva.

Solución. Basta mostrar que f posee a lo sumo un cero en $B_1(0)$ simple.

Como f tiene a lo sumo un cero en A, porque $f|_A$ es inyectiva, y un número finito de ceros en $\overline{B}_r(0)$, tiene un número n finito de ceros en $B_1(0)$ y, en particular, existe $s \in (r, 1)$ tal que todos los ceros de f están en $B_s(0)$ y

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(0)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial B_s(0))} \frac{dz}{z} = I(f \circ \gamma, 0),$$

con γ una parametrización de $\partial B_s(0)$. Como $B_s(0) \subset A$ y $f|_A$ es inyectiva, la curva $f \circ \gamma$ es simple. Luego su índice con respecto a 0 es un elemento de $\{0, \pm 1\}$. ☐

5. *(a)* Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera que no es constante y sea $c > 0$. Si $A_c = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}$ y $B_c = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$, entonces B_c es la clausura de A_c.

(b) Si $p \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio no constante y $c > 0$, entonces cada componente conexa del abierto $\{z \in \mathbb{C} : |p(z)| < c\}$ contiene una raíz de p.

Solución. *(a)* Es claro que $A_c \subset B_c$ y que B_c es cerrado, así que $\overline{A}_c \subset B_c$.

Sea $z_0 \in B_c$ y supongamos que $z_0 \notin A_c$, de manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z_0) \cap A_c = \{z_0\}$. Entonces si $z \in \overline{B}_{\varepsilon/2}(z_0)$ es $|f(z)| \geq c > 0$, y vemos que f no se anula en $\overline{B}_{\varepsilon/2}(z_0)$ y que alcanza su mínimo en el centro de este disco. Así, f debe ser constante, contradiciendo a la hipótesis. Esto prueba que debe ser $z_0 \in \overline{A}_c$ y, en definitiva, que $B_c \subseteq \overline{A}_c$.

(b) Sea Ω una componente conexta del abierto $\{z \in \mathbb{C} : |p(z)| < c\}$. Como $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$, el conjunto Ω es acotado. Por otro lado, si $z \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, entonces $|p(z)| = c$. En efecto, en ese caso existen dos sucesiones $(u_n)_{n\geq 1}$ y $(v_n)_{n\geq 1}$ tales que $u_n \in \Omega$, $v_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = z$, y entonces

$$c \geq \lim_{n\to\infty} |p(u_n)| = |p(z)| = \lim_{n\to\infty} |p(v_n)| \geq c,$$

de manera que $|p(z)| = c$, como queríamos.

Del principio de máximo sabemos que

$$|p(z)| \leq c \text{ si } z \in \Omega. \tag{2}$$

Supongamos, para llegar a un absurdo, que p no se anula en Ω. Entonces $1/p$ es una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, y su módulo en $\partial\Omega$ es $1/c$. Del principio de máximo, otra vez, vemos que

$$|1/p(z)| \leq 1/c \text{ para todo } z \in \Omega. \tag{3}$$

De (2) y (3) vemos que $|p|$ es constante en Ω y el principio de máximo, una vez más, nos permite concluir que p es constante. Esto es absurdo. ☐

6. Sea f una función holomorfa en $\overline{\mathbb{C}} - \{-1, 2\}$ que tiene en -1 un polo simple y en 2 un polo doble. Supongamos además que

(i) $\operatorname{res}(f, -1) = 1$ y $\operatorname{res}(f, 2) = 2$

(ii) $f(0) = \frac{7}{4}$ y $f(1) = \frac{5}{2}$

Determinar f y calcular su desarrollo en serie de Laurent en potencias de z en la corona $1 < |z| < 2$ y el residuo de f en ∞.

Solución. Como f es meromorfa con un número finito de polos en $\overline{\mathbb{C}}$, se trata de una función racional, digamos $f = p/q$ con $p, q \in \mathbb{C}[z]$. Como ∞ no es uno de sus polos, $\deg p \leq \deg q$. Del teorema de Mittag-Leffler sabemos que existen polinomios $u, v \in \mathbb{C}[z]$, un número $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y una función entera ϕ tal que

$$f(z) = \left(\frac{1}{z+1} - u(z)\right) + \left(\frac{\alpha}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-2} - v(z)\right) + \phi(z)$$

Como f es acotada en ∞, la función $\phi(z) - u(z) - v(z)$ también lo es, y como es entera, es constante. Luego vemos que, en definitiva, existe $\beta \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{\alpha}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-2} + \beta.$$

Evaluando esto es 0 y en 1, podemos determinar α y β usando la condición *(ii)*.

❖ ❖ ❖