ANÁLISIS COMPLEJO
Primer Cuatrimestre — 2009

Segundo parcial — Recuperatorio

APELLIDO Y NOMBRE: ....
L.U.: .... PÁGINAS: ....

---

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa con polos simples y residuos enteros. Entonces existe una función meromorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f = g'/g$.

2. *(a)* Si $n \in \mathbb{N}$, entonces la ecuación

$$e^z = 3z^n$$

tiene exactamente n raíces distintas en $B_1(0)$.

(b) Determine la cantidad de raíces que el polinomio $z^5 + iz^3 - 4z + i$ tiene en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

3. Calcule el valor principal de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} \, dx.$$

4. Sea $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y supongamos que existe $r \in (0,1)$ tal que la restricción $f|_A$ de f a $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ es inyectiva. Entonces f es inyectiva.

5. *(a)* Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera que no es constante y sea $c > 0$. Si $A_c = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}$ y $B_c = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$, entonces B_c es la clausura de A_c.

(b) Si $p \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio no constante y $c > 0$, entonces cada componente conexa del abierto $\{z \in \mathbb{C} : |p(z)| < c\}$ contiene una raíz de p.

6. Sea f una función holomorfa en $\overline{\mathbb{C}} - \{-1, 2\}$ que tiene en -1 un polo simple y en 2 un polo doble. Supongamos además que

(i) $\operatorname{res}(f, -1) = 1$ y $\operatorname{res}(f, 2) = 2$
(ii) $f(0) = \frac{7}{4}$ y $f(1) = \frac{5}{2}$

Determinar f y calcular su desarrollo en serie de Laurent en potencias de z en la corona $1 < |z| < 2$ y el residuo de f en ∞.

❖ ❖ ❖