
ANÁLISIS COMPLEJO

Primer Cuatrimestre — 2009

Práctica 2: Ecuaciones de Cauchy-Riemann

1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Probar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = a \text{ y } \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = b.$$

2. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

y

$$g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Supongamos que f es derivable en $z_0 = a + ib$.

(a) Probar que g es diferenciable en (a, b) .

(b) Calcular

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

y

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

en términos de u y v . ¿Qué se deduce?

(c) ¿Qué relación hay entre $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a, b)$?

3. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{si } x + iy \neq 0; \\ 0, & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

Muestre que f es continua en 0 y que cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero que *no* es derivable.

4. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z = x + iy$. Hallar $f'(z)$ en cada caso:

(a) $f(z) = y + ix$,

(b) $f(z) = \bar{z}$,

(c) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$,

(d) $f(z) = x^2 + iy^2$,

(e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$,

(f) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x),$

(g) $f(z) = z^3 - 2z,$

(h) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z},$

(i) $f(z) = \frac{z+1}{1-z},$

(j) $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2}, & \text{si } z \neq 0; \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$

5. Una función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tipo \mathcal{C}^2 es armónica si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Por otro lado, decimos que una función $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una *conjugada armónica* de u si la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa.

(a) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son \mathcal{C}^2 , entonces ambas son funciones armónicas. Deducir que si u es una función \mathcal{C}^2 que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.

(b) Si v y \bar{v} son conjugadas armónicas de u , entonces v y \bar{v} difieren en una constante.

(c) Encuentre, cuando sea posible, conjugadas armónicas de las siguientes funciones:

1. $u_1(x, y) = x^2 - y^2,$

2. $u_2(x, y) = x^2 y^2,$

3. $u_3(x, y) = 2x(1 - y).$

(d) Muestre que si v es conjugada armónica de u , las curvas de nivel de u y v se cortan de manera ortogonal.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto de \mathbb{C} abierto, conexo y no vacío).

(a) Para todo z_0 y z_1 en Ω existe una curva γ de tipo \mathcal{C}^1 a trozos tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.

(b) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω , entonces f es constante.

7. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces:

(a) $\operatorname{Re}(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

(b) $\operatorname{Im}(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

(c) $|f|$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

(d) $\arg(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

(e) \bar{f} es holomorfa $\Rightarrow f$ es constante.

8. Sean $L_1, \dots, L_n \subseteq \mathbb{C}$ n rectas distintas. Si $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ entonces g es constante.

9. Sea Ω un abierto simétrico respecto del eje real y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa.

10. Encuentre todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f'(0) = 1$ y

$$f(x + iy) = e^x f(iy)$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

Sugerencia. Defina $c, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que sea $f(iy) = c(y) + is(y)$ para cada $i \in \mathbb{R}$ y muestre que $c' = -s$ y que $s' = c$.

11. Regla de L'Hospital. Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Sugerencia. Es $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$ con $\lim_{z \rightarrow z_0} \eta(z) = 0$.

12. Calcule

$$(a) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1},$$

$$(c) \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3 + 1},$$

$$(b) \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i},$$

$$(d) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}.$$

13. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una curva de clase \mathcal{C}^1 . Sea $v = \gamma'(t_0)$ el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a la curva en $t = t_0$. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y sea $z = f'(\gamma(t_0))$. Entonces zv es el número complejo que se obtiene trasladando al origen el vector tangente a la curva $f \circ \gamma$ en $t = t_0$.

14. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por $\gamma_1(t) = t$ y $\gamma_2(t) = (1 + i)t$. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4$. Calcule en qué ángulo se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en $t = 0$.



Augustin Louis Cauchy
1789–1857, Francia