Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre — 2009

Práctica 5: Fórmula de Cauchy

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y sea $R \in \mathbb{R}$ un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ si $|z| > R$. Entonces f es un polinomio de grado menor o igual que n.

2. Hallar todas las funciones enteras $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para las cuales es

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = 5.$$

3. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica no suryectiva.

(a) u está acotada superior o inferiormente.

(b) u es constante.

Por lo tanto, toda función armónica es constante o suryectiva.

4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera tal que existen dos números $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ que son $\mathbb{R}$-linealmente independientes y para los que es

$$f(z + z_0) = f(z + z_1) = f(z)$$

cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$. Muestre que f es constante.

5. *(a)* Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no idénticamente nula. Si $a \in \Omega$ es tal que $f(a) = 0$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z - a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no idénticamente nula. Entonces el conjunto de ceros de f es discreto y en todo compacto de Ω la función f tiene sólo un número finito de ceros.

6. *(a)* ¿Existe una función $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que

$$f(\tfrac{1}{2n}) = f(\tfrac{1}{2n+1}) = \tfrac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$?

(b) ¿Existe una función $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que

$$f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{3-2n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$?

7. Hallar todas las funciones enteras tales que

$$n^2 f(\tfrac{1}{n})^3 + f(\tfrac{1}{n}) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío conexo y simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ es $f(z) \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $z \in \Omega$ se tiene que

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

9. Consideremos la función

$$f : z \in B_1(0) \mapsto \cos \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{C}.$$

Muestre que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con $n \in \mathbb{N}$ impar, que f es holomorfa en $B_1(0)$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $B_1(0)$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?

10. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas que no se anulan en Ω. Si existe una sucesión convergente $(a_n)_{n\geq 1}$ de puntos de Ω tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega$, si $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω.

11. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas tales que $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.

12. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y conexo y sean $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$. Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \dots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P en $\overline{\Omega}$ a los puntos $P_1, \dots, P_n$ alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω.

13. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leq |e^z - \frac{1}{2}|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Entonces $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

14. Formule y demuestre un "principio de módulo mínimo" para funciones holomorfas.

15. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua, holomorfa en Ω y no constante. Si $|f|$ es constante sobre $\partial\overline{\Omega}$, entonces existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

16. Sea $f : B_1(0) \to B_1(0)$ una función holomorfa. Si existen dos números complejos distintos $a, b \in B_1(0)$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo $z \in B_1(0)$.

Sugerencia. Considere la función $g(z) = \frac{h(z)-a}{1-\bar{a}h(z)}$ con $h(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)$ y use el Lema de Schwarz.

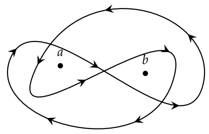
17. Sean $f, g : B_1(0) \to B_1(0)$ funciones holomorfas y biyectivas. Si f y g coinciden en dos puntos distintos de $B_1(0)$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in B_1(0)$.

18. Encuentre todas las funciones holomorfas $f : B_1(0) \to B_4(1)$ tales que $f(0) = 3$ y $f(\frac{1}{2}) = 1$.

19. Si $f : B_1(0) \to B_1(0)$ es una función holomorfa con $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ y tal que $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in B_1(0)$.

20. Encuentre todas las funciones holomorfas $f : B_1(0) \to B_2(0)$ tales que $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$.

21. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ distintos, sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



(a) Muestre que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.

(b) *Convénzase* de que γ no es homotópica a cero en Ω.

22. Si Ω es un abierto simplemente conexo y si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de simple conexión?

23. *(a)* Sea $\Omega \subset \Omega$ un abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Entonces existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$.

Sugerencia. Considere la función g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y muestre que que $h = e^{-g} f$ es constante.

(b) Muestre que la función g de *(a)* está unívocamente determinada.

(c) Decida si, en las condiciones de *(a)*, vale que

$$z_1, z_2 \in \Omega \text{ y } f(z_1) = f(z_2) \implies g(z_1) = g(z_2).$$

(d) ¿Es necesaria la hipótesis de simple conexión en *(a)*?

24. Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones enteras. Entonces $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \operatorname{sen}(h(z))$.

Sugerencia. Observe que $1 = (f + ig)(f - ig)$, de manera que $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

Joseph Liouville
1809–1882, Francia

Aparte de su teorema sobre las funciones enteras acotadas, y de muchas otras contribuciones a la matemática, Liouville es recordado por haber exhibido por primera vez números trascendentes.