# Análisis Complejo
## Primer Cuatrimestre — 2009

## Práctica 6: Sucesiones de funciones holomorfas

## El espacio de funciones holomorfas

Fijemos un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $\mathcal{O}(\Omega)$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las funciones holomorfas en $\Omega$.

**1.1.** Existe una sucesión de compactos $\mathcal{K} = (K_n)_{n\geq 1}$ de $\Omega$ tal que para todo compacto $K \subset \Omega$ existe $n \geq 1$ tal que $K \subseteq K_n$.

**1.2.** Notemos, para cada $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y cada compacto $K \subset \Omega$,

$$\|f\|_K = \sup_{z\in K}|f(z)|.$$

Sea $\phi : t \in \mathbb{R}_0^+ \mapsto \frac{t}{1+t} \in \mathbb{R}_0^+$, sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ la sucesión en $\mathbb{R}_0^+$ tal que $a_n = 2^{-n}$ y sea $d : \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$ dada por

$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} a_n \phi\big(\|f-g\|_{K_n}\big)$$

*(a)* La función $d$ está bien definida: esto es, la serie converge para toda elección de $f$ y de $g$ en $\mathcal{O}(\Omega)$.

*(b)* Se trata de una métrica sobre $\mathcal{O}(\Omega)$.

*(c)* Una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ converge para la métrica $d$ a una función $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sii $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre cada compacto de $\Omega$ a $f$.

*(d)* La métrica $d$ hace de $\mathcal{O}(\Omega)$ un espacio métrico completo.

*(e)* Más áun, las estructuras de espacio métrico y de $\mathbb{C}$-espacio vectorial de $\mathcal{O}(\Omega)$ son compatibles en el sentido que
- las operaciones $+ : \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ y $\cdot : \mathbb{C} \times \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ son continuas, y
- la métrica $d$ es invariante por translaciones, esto es, siempre que $f, g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ es $d(f+h, g+h) = d(f,g)$.

*(f)* La aplicación de evaluación

$$\mathsf{ev} : (f,z) \in \mathcal{O}(\Omega) \times \Omega \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

es continua.

**†1.3.** *(a)* La métrica contruida en el ejercicio anterior depende evidentemente de la elección de la familia de compactos $\mathcal{K}$, de la función $\phi$ y de la sucesión $a$. Encuentre condiciones generales sobre la terna $(\mathcal{K}, \phi, a)$ que garanticen que procediendo como antes se obtiene una métrica que satisface las propiedades enumeradas.

*(b)* Dadas dos métricas $d_1$ y $d_2$ construidas como arriba, ¿cuándo son equivalentes y cuándo son métricamente equivalentes?

**1.4.** Muestre que si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$ convergente y su $f$ es su límite, entonces $(e^{f_n})_{n\geq 1}$ converge a $e^f$. Generalice.

**1.5.** Sea $K \subset \Omega$ un compacto.

*(a)* Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ uniformemente sobre $K$ y la función $f$ no se anula en $K$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que *(i)* $f_n$ no se anula en $K$ si $n \geq N$, y *(ii)* la sucesión $(\frac{1}{f_n})_{n\geq N}$ converge a $\frac{1}{f}$ uniformemente en $K$.

*(b)* Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones que convergen uniformemente sobre $K$ a $f$ y a $g$, elementos de $\mathcal{O}(\Omega)$, respectivamente. Entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre $K$ a $fg$.

*(c)* ¿Hay enunciados similares pero involucrando la convergencia en $\mathcal{O}(\Omega)$ en lugar de la convergencia uniforme sobre el compacto fijo $K$?

**1.6.** Sea $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Si $R > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P_n$ no se anula en $[-R, R]$.

**1.7.** Decimos que un subconjunto $X \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ es **acotado** si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $M_K > 0$ tal que $\|f\|_K < M_K$ para toda función $f \in X$.

*(a)* $X \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ es acotado sii para cada $z_0 \in \Omega$ existen $r > 0$ y $M > 0$ tales que $B_r(z_0) \subseteq \Omega$ y $|f(z)| < M$ si $z \in B_r(z_0)$. En otras palabras, $X$ es acotado si es "acotado en cada punto."

*(b)* Observe que esta noción de acotación no es la misma que la de acotación con respecto a la métrica $d$. Siempre que hablemos de la acotación de subconjuntos de $\mathcal{O}(\Omega)$, es a esta noción a la que nos referiremos.

*(c)* Un conjunto $X \subset \mathcal{O}(\Omega)$ es acotado sii para toda sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{C}$ que converge a cero y toda sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en $X$ la sucesión $(\alpha_n f_n)_{n\geq 1}$ converge a 0 en $\mathcal{O}(\Omega)$.

**1.8.** El espacio métrico $\mathcal{O}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel: un subconjunto $X \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ es compacto sii es cerrado y acotado.

Paul Montel
1876–1975, Francia