

## ANÁLISIS COMPLEJO

### Práctica N°3.

1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & a_n = \frac{n+1}{2n+1}, & \text{(ii)} & a_n = \frac{n}{2n^2+3}, & \text{(iii)} & a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}, \\ \text{(iv)} & a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), & \text{(v)} & a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{array}$$

2. Demostrar que la serie de término general  $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$ ,  $n \geq 2$ ,

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{converge si } q > 0 \text{ y } p > 1, & \text{(b)} & \text{converge si } q > 1 \text{ y } p = 1, \\ \text{(c)} & \text{diverge si } q > 0 \text{ si } p < 1, & \text{(d)} & \text{diverge si } 0 < q \leq 1 \text{ y } p = 1. \end{array}$$

3. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencia:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{34^n}} z^n, & \text{(ii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n, & \text{(iii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} z^n, \\ \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n, & \text{(v)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}, & \text{(vi)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n. \end{array}$$

4. **Criterio de Weierstrass.** Sea  $X$  un espacio métrico y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función tal que  $|u_n(x)| \leq M_n$  para todo  $x \in X$ . Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

5. Sean  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(Z_n)_{n \geq 0}$  sucesiones de números complejos tales que  $(a_n Z_n)_{n \geq 0}$  converge. Demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) Z_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (Z_n - Z_{n-1}) \text{ converge.}$$

6. Sean  $(a_n)_{n \geq 1}$  y  $(z_n)_{n \geq 1}$  sucesiones de números complejos.

- (a) **Criterio de Dedekind.** Demostrar que si  $\lim a_n = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  converge absolutamente y las sumas parciales de  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  están acotadas (es decir, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|\sum_{n=1}^k z_n| \leq M$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ) entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$  converge.
- (b) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  converge absolutamente y  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$  converge.

(Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

7. **Criterio de Dirichlet.** Sea  $(r_n)_{n \geq 1}$  una sucesión decreciente de números reales positivos tal que  $\lim r_n = 0$  y  $(z_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de números complejos. Demostrar que si las sumas parciales de  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  están acotadas, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n$  converge. (Sugerencia: usar el criterio de Dedekind.)

8. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, & \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n, & \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n, \\
 \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n, & \text{(v)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n, & \text{(vi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n, \\
 \text{(vii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n, & \text{(viii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}, & \text{(ix)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \\
 \text{(x)} & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n z^n, & \text{(xi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}.
 \end{array}$$

9. Hallar los valores de  $z$  para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}, & \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}, & \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}, \\
 \text{(iv)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}, & \text{(v)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}, & \text{(vi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}, \\
 \text{(vii)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}, & \text{(viii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^n, & \text{(ix)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{z-\alpha}{1-\alpha z} \right)^n, \quad |\alpha| < 1.
 \end{array}$$

10. Para  $m \in \mathbb{N}$  fijo, probar que los conjuntos de convergencia de las series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$  son iguales.

11. Probar que si el radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  es  $\rho > 0$ , entonces el de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$  es también  $\rho$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

12. Hallar los términos de orden  $\leq 3$  en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & e^z \operatorname{sen} z, & \text{(ii)} \quad \operatorname{sen} z \cos z, & \text{(iii)} \quad \frac{e^z - 1}{z}, \\
 \text{(iv)} & \frac{e^z - \cos z}{z}, & \text{(v)} \quad \frac{1}{\cos z}, & \text{(vi)} \quad \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.
 \end{array}$$

13. Para  $n \in \mathbb{N}$ , hallar el desarrollo en serie de potencias de la función  $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$ . (Sugerencia:  $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$ .)

14. Sea  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  una serie de potencias con radio de convergencia  $\rho > 0$ . Se dice que  $f(z)$  es *par* (*impar*) si  $a_n = 0$  para todo  $n$  impar (par). Mostrar que

- $f$  es par sii  $f(-z) = f(z)$  para todo  $z$  con  $|z| < \rho$ ,
- $f$  es impar sii  $f(-z) = -f(z)$  para todo  $z$  con  $|z| < \rho$ .

15. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  y  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  para  $n \geq 2$ .

- (a) Probar que  $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge en un entorno del origen, y la función  $R(z)$  es una función racional. Hallar una fórmula explícita para  $R(z)$ .
- (b) Descomponiendo  $R(z)$  en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de  $R(z)$  en serie de potencias.
- (c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el  $n$ -ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

## Funcion logartimo y raíces $n$ -ésimas

16. Si  $\Omega \subset \mathbb{C}^*$  es abierto, llamamos *rama del logaritmo de  $z$  en  $\Omega$*  a toda función continua  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $e^{g(z)} = z$  para todo  $z \in \Omega$ .
- (a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en  $\Omega$ .
  - (b) Sean  $g_1, g_2$  dos ramas de logaritmo en  $\Omega$ . Demostrar que si  $\Omega$  es conexo y existe  $z_0 \in \Omega$  tal que  $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ , entonces  $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$ .
  - (c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en  $\Omega$ , entonces  $S^1 \not\subseteq \Omega$ .
17. Sean  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una rama del logaritmo,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $a \in \Omega$ . Definimos  $a^b = e^{b \cdot g(a)}$ .
- (a) Verificar que si  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $a^b$  no depende de la elección de  $g$  y coincide con  $\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_b$ .
  - (b) Calcular todos los valores que pueden tomar  $i^i$ ,  $(-1)^{\frac{3}{5}}$  y  $1^\pi$  al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.
  - (c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones  $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h_1(z) = z^b$  y  $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h_2(z) = a^z$  son funciones holomorfas.
  - (d) Sean  $z \in \Omega$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  tales que  $z^a \in \Omega$ . ¿Qué relación hay entre  $z^{a+b}$  y  $z^a z^b$ ? ¿Qué relación hay entre  $z^{ab}$  y  $(z^a)^b$ ? ¿Y si se sabe que  $b \in \mathbb{Z}$ ?
18. Sea  $\log$  la rama principal del logaritmo definida en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Probar que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{arctg}(t) = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{i-t}{i+t} \right).$$

19. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\Omega \subset \mathbb{C}^*$  es abierto, llamamos *rama de la raíz  $n$ -ésima de  $z$  en  $\Omega$*  a toda función continua  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $g(z)^n = z$  para todo  $z \in \Omega$ . En tal caso, notaremos  $\sqrt[n]{z}$  a  $g(z)$ .
- (a) Probar que si  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ , hay exactamente dos ramas de  $\sqrt{z}$  en  $\Omega$ . Definirlas.
  - (b) Probar que toda rama de  $\sqrt{z}$  es holomorfa.
  - (c) Si  $\Omega$  es conexo y  $f$  es una rama de  $\sqrt{z}$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  y  $-f$  son todas las ramas.
20. Sea  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Sea  $g(z)$  una rama del logaritmo definida en  $\Omega$  y sea  $\sqrt[3]{z}$  la rama de la función raíz cúbica definida en  $\Omega$  por  $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$ .
- (a) Demostrar que para toda rama  $g$ ,  $\sqrt[3]{z}$  pertenece a  $\Omega$  para todo  $z$  en  $\Omega$ .
  - (b) Hallar todas las ramas  $g$  para las cuales  $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$  para todo  $z$  en  $\Omega$ .
  - (c) Probar que si se cambia  $\Omega$  por  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ , aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el ítem (b).