

## ANÁLISIS COMPLEJO

### Práctica N°8.

1. Probar que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Para  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| < 1$ , probar que

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z}.$$

3. (a) Probar que si  $|z| < \frac{1}{2}$  entonces:

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1 + z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

(b) Probar que el producto  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  converge absolutamente si y solo si la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge absolutamente. Mostrar que el enunciado es falso si no se pide convergencia absoluta.

4. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$$

converge normalmente en  $B(0, 1)$  (y por lo tanto define una función holomorfa en  $B(0, 1)$ ).

5. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z - 1}{n^2 z + 1}$$

define una función holomorfa en  $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

6. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$$

define una función entera. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

7. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

define una función entera.

8. *Funciones holomorfas con ceros prefijados en la bola unidad.*

(a) Sean  $a, z \in \mathbb{C}$  y  $r \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < |a| < 1$  y  $|z| \leq r < 1$ . Probar que

$$\left| \frac{a + |a|z}{(1 - \bar{a}z)a} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r}.$$

(b) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  una sucesión tal que  $0 < |a_n| < 1$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$ . Probar que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{(a_n - z)}{(1 - \bar{a}_n z)}$$

define una función holomorfa en  $B(0, 1)$  y que  $|f(z)| \leq 1$  para todo  $z \in B(0, 1)$ .  
¿Cuales son los ceros de  $f$ ?

9. Demostrar que existe una función  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a  $B(0, 1)$  propiamente. (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

10. Sea  $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$ . Teniendo en cuenta que  $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \cotg(\pi z)$ , demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

11. (a) Probar que si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , la *función zeta de Riemann* definida por  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  está bien definida.

(b) Probar que si  $\operatorname{Re}(s) > 1$  entonces  $\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \sum_{n \text{ impar}} n^{-s}$ .

(c) Demostrar que existen infinitos números primos.

(d) Demostrar que  $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})$  donde  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  es la sucesión creciente formada por todos los primos positivos.

12. *Función Gamma.*

(a) Sea  $z$  un número real positivo. Sabiendo que para todos  $t \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $0 < t < n$  vale que

$$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{e^{-t+1}t^2}{2n},$$

probar que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

(b) Integrando por partes  $n$  veces, probar que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+z}.$$

(c) Sea  $\gamma$  la constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

Probar que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k}{k+z} \right) e^{\frac{z}{k}}$$

y deducir que el mismo resultado vale para todo  $z \in \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

(d) Notar que la fórmula del ítem anterior extiende la definición de  $\Gamma$  al conjunto  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . Probar que para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  vale que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

### Automorfismos

13. (a) Sea  $f$  un automorfismo de  $B(0, 1)$  tal que  $f(0) = 0$ . Probar que existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $f(z) = e^{i\theta}z$  para todo  $z$  en  $B(0, 1)$ .
- (b) Probar que  $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  es automorfismo si y sólo si existen  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in B(0, 1)$  tales que para todo  $z$  en  $B(0, 1)$ ,

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}.$$

14. (a) Sea  $\mathbb{P}$  el semiplano superior (también llamado el semiplano de Poincaré). Es decir,  $\mathbb{P} = \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$ . Probar que  $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  es automorfismo si y sólo si existen  $a, b, c$  y  $d \in \mathbb{R}$  con  $ad - bc > 0$  tales que para todo  $z$  en  $\mathbb{P}$ ,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

15. Caracterizar todos los automorfismos de  $\mathbb{L} = \{\operatorname{Im}(z) > 0, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .
16. Caracterizar todos los automorfismos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . (Sugerencia: recordar el ejercicio 12 de la práctica 6.)
17. Sean  $\Omega$  un abierto simplemente conexo del plano,  $f$  y  $g$  dos automorfismos de  $\Omega$  y  $a$  y  $b$  dos puntos distintos de  $\Omega$ . Si  $f(a) = g(a)$  y  $f(b) = g(b)$ , probar que  $f(z) = g(z)$  para todo  $z$  en  $\Omega$ .
18. Caracterizar todos los automorfismos de  $\mathbb{C}^*$ . (Sugerencia: estudiar el desarrollo de Laurent en 0 de un tal automorfismo.)