

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA 9

Ejercicio 1: Recordemos que las transformaciones de potencia tienen la forma

$$T_p(x) = \begin{cases} ax^p + b & (p \neq 0) \\ c \log x + d & (p = 0) \end{cases}$$

donde a , b , c , d y p son números reales, con $a > 0$ para $p > 0$ y $a < 0$ para $p < 0$.

Muestre que todas las transformaciones de potencia especificadas en la definición anterior preservan el orden de cualquier lote de números positivos.

Construya un ejemplo en el cual el orden no se preservaría si c fuera negativo cuando $p = 0$.

Ejercicio 2: Muestre un conjunto de datos de tamaño $n = 6$ que ilustre que la mediana es, aproximadamente pero no exactamente, preservada por una transformación raíz cuadrada.

Ejercicio 3: Sea $T(x)$ una transformación de potencias. La mediana del lote transformado es igual (salvo diferencias por interpolación o redondeo) a la transformada de la mediana de los datos crudos. Una relación similar no es satisfecha por la media muestral ni por la esperanza poblacional. Este ejercicio muestra que el apareamiento puede reducir esa diferencia.

a) Muestre que la correspondiente transformación apareada a $T(x)$ en x_0 está dada por

$$z = a + bT(x)$$

con

$$a = x_0 - \frac{T(x_0)}{T'(x_0)} \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{T'(x_0)}$$

b) Sea

$$Z = a + bT(X)$$

la variable aleatoria definida por la transformación apareada dada en el ítem a).

Utilice un desarrollo de Taylor de $T(X)$, alrededor de x_0 hasta el término cuadrático para obtener la siguiente aproximación para la esperanza de Z

$$E(Z) \approx x_0 - \frac{T(x_0)}{T'(x_0)} + \frac{1}{T'(x_0)} \left[T(x_0) + E(X - x_0)T'(x_0) + \frac{1}{2} E(X - x_0)^2 T''(x_0) \right]$$

y por lo tanto

$$E(Z) \approx E(X) + \frac{1}{2} E(X - x_0)^2 \frac{T''(x_0)}{T'(x_0)}.$$

c) Muestre que

$$E(X - x_0)^2 = \text{Var}(X) + (E(X) - x_0)^2$$

y si x_0 está cerca de $E(x)$ entonces

$$E(Z) \approx E(X) + \frac{1}{2} \text{Var}(X) \frac{T''(x_0)}{T'(x_0)}.$$

Podemos interpretar la ecuación anterior como sigue:

Si Z es una transformación apareada de X en un punto cercano a la media de X , la media de Z es aproximadamente igual a la media de X más un término que depende de la dispersión de X y de la curvatura de la transformación.

Ejercicio 4: Las tablas 1 y 2 muestran transformaciones no apareadas

Tabla 1. Despliegue de los valores letra y los resúmenes medios para una muestra de ingresos familiares; en la escala original y en la escala logarítmica (

#	994	Escala original			Escala logarítmica (base 10)		
		Ingresos familiares en dólares			Ingresos familiares		
M	497.5	3480.0			3.54		
F	249	2412.0	3678.0	4944.0	3.38	3.54	3.69
E	125	1788.0	4115.5	6443.0	3.25	3.53	3.81
D	63	1517.0	4400.5	7284.0	3.18	3.52	3.86
C	32	1248.0	4799.0	8350.0	3.10	3.51	3.92
B	16.5	963.5	4978.8	8994.0	2.98	3.47	3.95
A	8.5	727.5	5241.0	9754.5	2.86	3.43	3.99
Z	4.5	579.0	5394.5	10210.0	2.76	3.39	4.01
Y	2.5	345.0	5510.3	10675.5	2.54	3.28	4.03
	1	114.0	5494.0	10874.0	2.06	3.05	4.04

- Halle las transformaciones lineales para aparear los datos transformados con los datos originales en la mediana para cada una de las transformaciones de las tablas 1 y 2.
- Reconstruya las tablas 1 y 2 para los datos apareados.
- Explique porqué la comparación de los cuatro lotes se facilita mediante el apareamiento.
- Observe como cada una de las transformaciones acerca los valores altos hacia el centro y aleja los valores bajos hacia afuera, inclusive más allá de la cota natural el cero.

Tabla 2. Despliegue de valores letra junto con los resumen medios para las escalas de raíz cuadrada y raíz cuarta en el ejemplo de los ingresos familiares.

#	994	Escala raíz cuadrada			Escala raíz cuarta		
		Ingresos familiares			Ingresos familiares		
M	497.5		58.1		7.68		
F	249	49.1	59.7	70.3	7.01	7.70	8.39
E	125	42.3	61.3	80.3	6.50	7.73	8.96
D	63	38.9	62.1	85.3	6.24	7.74	9.24
C	32	35.3	63.4	91.4	5.94	7.75	9.56
B	16.5	31.0	62.9	94.8	5.57	7.65	9.74
A	8.5	27.0	62.9	98.8	5.19	7.57	9.94
Z	4.5	24.1	62.6	101.0	4.91	7.48	10.1
Y	2.5	18.6	60.9	103.3	4.31	7.24	10.2
	1	10.7	57.5	104.3	3.27	6.74	10.2