

## Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2002

### ESPACIOS DE BANACH

*Los equipos se arman de atrás para adelante*

- (a) Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $s_f = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \text{ p.c.t. } n\}$ , entonces  $s_f$  es un subespacio de  $\ell^p$  no cerrado (más aún, es denso).
- (b) Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $S \subset E$  un subespacio, entonces  $\overline{S}$  es un subespacio.
- (c) Sean  $E$  un espacio de Banach,  $S$  un subespacio cerrado de  $E$ , entonces  $S$ , con la norma inducida por  $E$ , es un espacio de Banach.

- (a) Sea  $K$  un espacio topológico compacto, entonces  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas}\}$  con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

- (b) Si  $K$  es un compacto de  $\mathbb{C}^n$ ,  $C(K)$  es separable.

3. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado. Son equivalentes:

- (a)  $E$  es Banach
- (b)  $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  es completo
- (c)  $\{x \in E : \|x\| = 1\}$  es completo

DEFINICIÓN: Sean  $E$  un espacio vectorial,  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  dos normas definidas sobre  $E$ . Decimos que las normas son equivalentes si y sólo si  $\exists a, b > 0 / \|x\| \leq a\|x\|' \leq b\|x\| \quad \forall x \in E$ .

4. (a) Dos normas definidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si cada sucesión que converge con una, converge con la otra.
- (b) Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas definidas sobre  $E$  son equivalentes.
- (c) Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier norma que se defina sobre  $E$  hace de  $E$  un espacio de Banach.
- (d) Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $S \subset E$  un subespacio de dimensión finita, entonces  $S$  es cerrado.

5. Si  $E$  es un espacio vectorial normado de dimensión finita,  $B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  es compacta.

6. Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $F \subset E$  un subespacio de dimensión finita, entonces  $\forall x \notin F \exists y_0 \in F$  que realiza la distancia, o sea

$$\|x - y_0\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

(Sug: ver que  $y_0 \in S = \{y \in F : \|y\| \leq 2\|x\|\}$ ).

7. *Lema de Riesz*: Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $F \subset E$  un subespacio cerrado propio ( $F \neq E$ ),  $0 < a < 1$ , entonces  $\exists x_a \in E$ ,  $\|x_a\| = 1$  tal que  $d(x_a, F) \geq a$ .

(Sug: Sea  $x \in E - F$ ,  $d = d(x, F) > 0$ , tomar  $y_0 \in F$  tal que  $0 < d(x, y_0) < \frac{d}{a}$  y probar que  $x_a = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$  es el que sirve).

8. Sea  $E$  un espacio vectorial normado,  $B(0, 1)$  es compacta si y sólo si  $\dim E < \infty$ .
9. (a) Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $S \subset E$  un subespacio.  $S$  tiene interior no vacío si y sólo si  $S = E$ .
- (b) Sea  $E$  un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces  $\dim E > \aleph_0$ .
10. Un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.
11. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $S, T \subset E$  subespacios cerrados con  $\dim T < \infty$  entonces  $S + T$  es cerrado.
12. Sea  $E$  un espacio vectorial normado,  $E$  es de Banach si y sólo si  $\forall (x_n)_n \subset E$  vale que:  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge en  $E$ .
13. Sean  $E$  y  $F$  espacios vectoriales normados. En  $E \times F$ , definimos  $\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$ .
- (a)  $(E \times F, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial normado.
- (b) Si  $E$  y  $F$  son espacios de Banach,  $E \times F$  resulta un espacio de Banach.
- (c) La inyección  $J_E : E \rightarrow E \times F$  dada por  $J_E(x) = (x, 0)$  y la proyección  $P_E : E \times F \rightarrow E$  dada por  $P_E(x, y) = x$  son ambas continuas. Lo mismo vale para  $J_F$  y  $P_F$ .
14. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $S \subset E$  un subespacio cerrado.
- (a) Probar que  $E/S$  es un espacio vectorial.
- (b) Si definimos en  $E/S$  la norma  $\|[x]\| = \|x + S\| = d(x, S)$ , probar que está bien definida y que es, efectivamente, una norma.
- (c) Si  $\Pi : E \rightarrow E/S$  es la proyección al cociente  $\Pi(x) = [x]$ , ver que  $\Pi$  es lineal, que  $\|\Pi\| \leq 1$  y que  $\Pi$  es abierta.
- (d) Probar que  $E/S$  es un espacio de Banach.
15. Probar que los siguientes espacios son Banach con las normas indicadas. Por  $\Omega$  entendemos un dominio compacto en  $\mathbb{R}^N$ .
- (a)  $C^1(\Omega)$   $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \sum \|f_{x_i}\|_{\infty}$ .
- (b)  $C^r(\Omega)$   $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \sum \|f_{x_i}\|_{\infty} + \dots + \sum \|f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}}\|_{\infty}$ .
- (c)  $Lip(\Omega)$   $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \sup_{x, y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ .
- (d)  $C^{\alpha}$   $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \sup_{x, y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}}$   $0 < \alpha < 1$ . ¿Qué sucede si  $\alpha > 1$ ?
- (e) Espacios de Sobolev.

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) / \forall 1 \leq i \leq N, \exists g_i \in L^p(\Omega) \text{ tal que}$$

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi_{x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} g_i(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)\}$$

$$\|f\| = \|f\|_{L^p} + \sum \|g_i\|_{L^p}$$

(f) Espacio de Variación Acotada.

$$BV([0, 1]) = \{f \in C([0, 1]) / \sup_{0=a_0 < a_1 < \dots < a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < +\infty\}$$

$$\|f\| = \|f\|_{\infty} + \sup_{0=a_0 < a_1 < \dots < a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$$