Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2002

Espacios de Sobolev

Tenemos que jugar con firmeza, marcarlos en todos lados
y esperar sacar un buen resultado.– Bruce Arena

1. Sean $1 \leq p \leq \infty$, $I = (-1,1)$, $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $H(x) = 1$ si $x > 0$ y $H(x) = 0$ si no.
   (a) Probar que $u \in W^{1,p}(I)$ y que $u' = H$.
   (b) Más aún, toda función continua en $\bar{I}$ con derivada continua a trozos en I pertenece a $W^{1,p}(I)$.
   (c) $H \notin W^{1,p}(I)$.

2. Probar que en cada clase de $L^p(\Omega)$ existe a lo sumo una función continua.

3. Sean $1 < p \leq \infty$, $(u_n)_{n\in I\!N} \subset W^{1,p}((a,b))$, $u \in L^p((a,b))$ tales que $u_n \to u$ en $L^p((a,b))$ y $(u')_{n\in I\!N}$ es acotada en $L^p((a,b))$. Probar que $u \in W^{1,p}((a,b))$ y que existe una subsucesión tal que $u_{n_k} \xrightarrow{w} u$ en $W^{1,p}((a,b))$.

4. (a) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $1 \leq p < \infty$ entonces $u \in AC([a,b])$.
   (b) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $p > 1$, entonces
$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_a^b |u'|^p \, dt\right)^{1/p} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

5. (a) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1((a,b))$ $|f(x)| \leq C\|f\|_{H^1((a,b))}$
   (b) Mostrar que (a) es falso en $\Omega \subset\subset I\!R^2$.
   (c) Usando el teorema de Arzelá-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1((a,b))$ es precompacto en $C([a,b])$, y por lo tanto en $L^2((a,b))$.

6. Supongamos que Ω es conexo y que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisface $\nabla u = 0$ a.e. en Ω. Probar que u es constante en Ω.

7. Si I es un intervalo acotado, probar que los polinomios son densos en $W^{1,p}(I)$ para $1 \leq p < \infty$.¿Qué pasa para $p = \infty$?

8. "Resolver" el problema:
$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ en } (0,1), \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

9. Consideremos el problema de Neumann
$$\begin{cases} -\Delta u + u & = & f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$
   donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

para toda $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(b) Mostrar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H^1(\Omega)$ solución débil de este problema.

10. Consideremos la siguiente ecuación diferencial elíptica de segundo orden:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + cu &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde

(a) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ con $\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, $\forall \xi \in I\!R^n$, $x \in \Omega$.

(b) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \ge \alpha > 0$ en Ω.

(c) $b_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $\operatorname{div}(\vec{b}(x)) = 0$ en Ω.

Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema.

11. Hallar los autovalores y las autofunciones de $Au = -u''$ con las condiciones de contorno

(a) $u(0) = u(1) = 0$ (Dirichlet)

(b) $u'(0) = u'(1) = 0$ (Neumann)

(c) $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$ (periódicas)

Verificar en cada caso que la sucesión de autovalores λ_n tiende a infinito y la sucesión de autofunciones $\{e_n\}_{n\in I\!N}$ es base de $L^2((0,1))$.

12. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$.

Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \nearrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(\Omega)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H^1(\Omega)$.

13. Se define el *p-Laplaciano* como $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ con $p > 1$ (cuando $p = 2$, $\Delta_p = \Delta$). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset I\!R^n$ abierto y $f \in L^{p'}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

(a) Probar que $u \in C_0^2(\Omega)$ es solución del problema si y sólo si verifica la siguiente formulación débil

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega |u|^{p-2} u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

(b) Probar que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimiza el siguiente funcional

$$\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to I\!R$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx - \int_\Omega f u \, dx$$

entonces es una solución débil del problema del p-Laplaciano.

(c) Probar que el problema del p-Laplaciano tiene una única solución débil en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

14. Probar, en cada caso, que $\phi \in H^1((-1,1))'$ y hallar $v \in H^1((-1,1))$ tal que $\phi(u) = \langle u, v \rangle$:

(a) $\phi(u) = \displaystyle\int_{-1}^{1} u(x) \sin(x) + u'(x) \cos(x) \, dx$

(b) $\phi(u) = \displaystyle\int_{-1}^{1} u(x) \cos(x) + u'(x) \sin(x) \, dx$