

Análisis Funcional - 1º cuatrimestre 2002

CÁLCULO FUNCIONAL

En la altura la pelota no dobla.

1. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo, entonces $\|A^{1/2}\| = \|A\|^{1/2}$.
2. Sean H un espacio de Hilbert, $A, B \in \mathcal{L}(H)$ operadores positivos tales que $AB = BA$, entonces AB es positivo.
3. Sean H un espacio de Hilbert, $A, S_1, S_2, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ tales que $0 \leq S_1 \leq T_1$ y $0 \leq S_2 \leq T_2$, entonces

$$\begin{aligned}\|S_1^{1/2}A\| &\leq \|T_1^{1/2}A\| \\ \|S_1^{1/2}AS_2^{1/2}\| &\leq \|T_1^{1/2}AT_2^{1/2}\|\end{aligned}$$

4. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo, entonces

$$\|Ax\|^2 \leq \|A\|\langle Ax, x \rangle$$

5. Sea H un espacio de Hilbert separable con base $\{e_n\}_n$, sea $K \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto positivo con descomposición espectral $Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$, entonces el operador $K^{1/2}$ es compacto y su descomposición espectral es $K^{1/2}x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \langle x, e_n \rangle e_n$.
6. Sean H un espacio de Hilbert, $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tales que $0 \leq A \leq B$. Si B es compacto, entonces A es compacto.
7. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $I \leq A$, entonces $A^{1/2}$ es acotado inferiormente.
8. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$. Probar que

$$A \geq 0 \iff \exists B \in \mathcal{L}(H) / A = B^*B$$

Nombre: Si $A \in \mathcal{L}(H)$, $|A| = (A^*A)^{1/2}$

9. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$.
 - (a) $\|Tx\| = \| |T|x \|$
 - (b) $R(T)$ es cerrado si y sólo si $R(|T|)$ es cerrado.
10. **Descomposición Polar:** Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces existe una única isometría parcial $U \in \mathcal{L}(H)$ tal que $T = U |T|$ y $\ker U = \ker T$.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ con descomposición polar $T = U|T|$. Entonces:
- (a) $|T| = U^*T$
 - (b) Si T es inversible, U es un operador unitario.
 - (c) Si $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ es el shift a derecha y $S = U|S|$ es su descomposición polar, entonces U no es unitario.
12. (a) Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Probar que existen únicos operadores positivos A^+ y A^- en $\mathcal{L}(H)$ tales que $A = A^+ - A^-$ y $A^+A^- = A^-A^+ = 0$. Además $\|A\| = \max\{\|A^+\|, \|A^-\|\}$.
(Sug: Considerar las funciones $f^+(t) = \max\{t, 0\} = \frac{1}{2}(|t| + t)$ y $f^-(t) = \max\{-t, 0\} = \frac{1}{2}(|t| - t)$, para la unicidad recordar que $|t|$ se aproxima uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}$ por polinomios reales sin término independiente)
- (b) Si $\varphi \in L^\infty[0, 1]$ a valores reales, y $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0, 1])$ es el operador de multiplicación, hallar M_φ^+ y M_φ^-
13. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:
- (a) $A = \Re(A) + i\Im(A)$, donde $\Re(A) = \frac{A+A^*}{2}$, $\Im(A) = \frac{A-A^*}{2i}$ son operadores autoadjuntos.
 - (b) A es combinación lineal de a lo sumo 4 operadores unitarios.
(Sug: Si $A^* = A$, $\|A\| \leq 1$, usar $f(t) = t + i\sqrt{1-t^2} \in C(\sigma(A))$ y que $t = \frac{f(t)+\overline{f(t)}}{2}$)
14. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo. $0 \notin \sigma(A)$ si y sólo si existe $B \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto tal que $A = e^B$.
15. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, tal que $0 \leq A \leq I$. Entonces $\{A^{1/n}\}_n$ es una sucesión creciente en $\mathcal{L}(H)$ y $\forall n, 0 \leq A^{1/n} \leq I$.
16. Sea H un espacio de Hilbert, sea $\varphi : \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ lineal tal que $\varphi(I) = I$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ y $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$. Entonces:
- (a) $\forall A \in \mathcal{L}(H), \sigma(\varphi(A)) \subset \sigma(A)$ y $\|\varphi(A)\| \leq \|A\|$
 - (b) Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto y $f \in C(\sigma(A))$ entonces $\varphi(f(A)) = f(\varphi(A))$
 - (c) Si φ es inyectiva y $A \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto entonces $\sigma(\varphi(A)) = \sigma(A)$.
(Sug: Si no coinciden los espectros, debe existir $f \in C(\sigma(A))$ no nula, tal que $f|_{\sigma(\varphi(A))} \equiv 0$)
 - (d) Si φ es inyectiva y $A \in \mathcal{L}(H)$ entonces $\|\varphi(A)\| = \|A\|$.