

Análisis Funcional - 1º cuatrimestre 2002

PRINCIPIO DE ACOTACIÓN UNIFORME, TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA,
TEOREMA DEL GRÁFICO CERRADO

La mejor defensa es un buen ataque

1. Sean E y F espacios de Banach, $T : E \rightarrow F$ lineal. Son equivalentes:

- (i) T es continuo.
- (ii) T es continuo en 0.
- (iii) T es acotado (i.e. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$)

2. Sean E y F espacios de Banach, $T : E \rightarrow F$ lineal. Entonces

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| < 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}\end{aligned}$$

$$\text{y } \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

3. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Considerar a A como un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Probar que $\|A\| = \max\{\lambda : \lambda \text{ es un autovalor de } A\}$.

4. **Operador Shift:** Sean $1 \leq p \leq \infty$, $S : \ell^p \rightarrow \ell^p$, $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$ dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

- (i) Probar que $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es inyectivo. Calcular $\|S\|$.
- (ii) Probar que $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es suryectivo. Calcular $\|T\|$.
- (iii) $TS = I$, $ST \neq I$.

5. **Operadores de Multiplicación:**

a) Si $\varphi \in C[0, 1]$, sea $M_\varphi : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definida por

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

Probar que $M_\varphi \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ y calcular su norma. Si $\varphi(t) = t$, probar que M_φ es un operador acotado de L^p en L^p y calcular su norma.

b) Sea $\varphi \in L^\infty[0, 1]$, definimos $M_\varphi : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ por $M_\varphi(f) = \varphi f$. Probar:

- (i) $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0, 1])$
- (ii) $M_\varphi^2 = M_\varphi \Leftrightarrow \varphi$ es una característica.

6. **Operadores integrales:** Si $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$, sea $K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ dado por

$$(Kf)(s) = \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$$

Probar que $K \in \mathcal{L}(L^2[0, 1])$ y que $\|K\| \leq \|k\|_2$

7. Sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión de números complejos, $1 \leq p < \infty$, definimos $A : \ell^p \rightarrow \ell^p$ por $A((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$. Probar:
- (i) A está bien definida $\Leftrightarrow \alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$
 - (ii) A es inyectiva $\Leftrightarrow \alpha_n \neq 0 \forall n$
 - (iii) A es un isomorfismo $\Leftrightarrow (\frac{1}{\alpha_n})_n \in \ell^\infty$
 - (iv) $\|A\| = \|\alpha\|_\infty$
8. Si $T, S, T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, entonces $(TS)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.
9. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| \leq 1$. Probar que $(I + A)$ es inversible, $(I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y que su inversa viene dada por

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X)$. Probar también que

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

10. Sea X un espacio de Banach y sea $T, T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Probar que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|S - T\| \leq 1/\|T^{-1}\|$, entonces S es inversible, $S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, y

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| < \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|S - T\|\|T^{-1}\|}.$$

11. Sean E y F espacios de Banach y sean $x_n, x \in E$, $A_n, A \in \mathcal{L}(E, F) \forall n \in \mathbb{N}$. Si $x_n \rightarrow x$ y $A_n \rightarrow A$ entonces $A_n x_n \rightarrow Ax$
12. Sean E y F espacios vectoriales normados, $\mathcal{L}(E, F)$ es Banach si y sólo si F es Banach.
13. Sea E un espacio de Banach, sean $A_n, A, B_n, B \in \mathcal{L}(E)$.
- (i) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
 - (ii) Si $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$ entonces $A_n B_n \rightarrow AB$
14. La *serie de Fourier* de una función integrable $f(x)$ definida en $(0, 2\pi)$ es la serie

$$s(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}, \quad \text{donde } a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy.$$

Sea $s_n(x) = \sum_{m=-n}^n a_m e^{imx}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ ($0 < x < 2\pi$). Probar que

$$s_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y+x) D_n(x) dx,$$

donde

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

15. Sea $X = \{f \in C([0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$.

(a) Probar que X es un espacio de Banach.

(b) Probar que el funcional lineal $T_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n(x) dx$$

es acotado y

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x)| dx.$$

(c) Probar que $\|T_n\| \rightarrow \infty$. (Sugerencia: $|\sin \frac{1}{2}x| \leq \frac{1}{2}|x|$)

16. Probar que existe una función continua $f(x)$ en $0 \leq x \leq 2\pi$, con $f(0) = f(2\pi)$, tal que su serie de Fourier diverge en $x = 0$.

Sugerencia: Usar el problema anterior y el Teorema de Banach-Steinhaus.

17. Sea E un espacio de Banach, sea $P : E \rightarrow E$ lineal tal que $P^2 = P$, sean $S = \ker(P)$, $T = R(P)$. Probar que $P \in \mathcal{L}(E)$ si y sólo si S y T son cerrados.

18. Sean E un espacio de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E)$ inversibles, $A \in \mathcal{L}(E)$ no inversible tales que $A_n \rightarrow A$, entonces $\|A_n^{-1}\| \rightarrow \infty$.

19. Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\exists Q \in \mathcal{L}(E) / Q^2 = Q, R(Q) = S$.

20. Sea E el espacio de Banach real $L^1((1, +\infty))$, sea $T : E \rightarrow E$ dado por $Tf(t) = \frac{1}{t} f(t)$. Probar que T es acotado pero no abierto.

(Sug: $0 \in T(B(0, 1))$ no es punto interior)

21. a) Sean E un espacio de Banach, F un subespacio de E , S un subespacio de E^* . Probar que:

(i) $F^\perp$ es un subespacio cerrado de E^* .

(ii) ${}^\perp S$ es un subespacio cerrado de E .

(iii) ${}^\perp(F^\perp) = \overline{F}$

(iv) $({}^\perp S)^\perp \supset \overline{S}$

b) Sea s_f el subespacio de $\ell^\infty = (\ell^1)^*$ de sucesiones finitas. Probar que $({}^\perp s_f)^\perp$ contiene estrictamente a $\overline{s_f}$

22. Sean E, F espacios vectoriales normados, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$, entonces

$$\text{dist}(x, \ker(T)) = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in (\ker(T))^\perp, \|\varphi\| \leq 1\}$$

23. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entonces $\hat{T} : E/\ker(T) \rightarrow F$, dado por $\hat{T}([x]) = T(x)$, es lineal, continuo y $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

DEFINICIÓN: Sea E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice acotado inferiormente si y sólo si $\exists c > 0 / \|Tx\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in E$.

24. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$. Probar que:
- (i) Si T es acotado inferiormente entonces $R(T)$ es cerrado.
 - (ii) T acotado inferiormente y suryectivo si y sólo si T inversible.
 - (iii) Sea $V : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ el operador de Volterra, dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Probar que V no es acotado inferiormente.

DEFINICIÓN: Sea E, F dos espacios de Banach, $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$. Decimos que T_n converge fuertemente a T si para cualquier $x \in E$ se tiene que $T_n(x) \rightarrow T(x)$.

25. Si T_n tiende fuertemente a T y x_n tiende a x entonces $T_n(x_n) \rightarrow T(x)$.
26. Si T_n tiende a T fuertemente y S_n tiende a S fuertemente, entonces $T_n S_n$ tiende a TS fuertemente.
27. Sean E, F dos espacios de Banach. Sean $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ tales que $A_n(x)$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Probar que existe un $A \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $A_n \rightarrow A$ fuertemente.
28. Sea $t_k = k/n$ una partición del intervalo $[0, 1]$, y sea $x(t) \in C[0, 1]$. Se define

$$A_n x(t) = \sum_{k=0}^n x(t_k) G_k^n(t)$$

donde $G_k^n(t) = \frac{(t-t_0) \dots (t-t_{k-1})(t-t_{k+1}) \dots (t-t_n)}{(t_k-t_0) \dots (t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1}) \dots (t_k-t_n)}$.

- (a) Demostrar que $A_n \in \mathcal{L}(C[0, 1])$.
 - (b) Demostrar que $\|A_n\| = \max_{t \in [0, 1]} \sum_{k=0}^n |G_k^n(t)|$.
 - (c) Mostrar que si $p(t)$ es un polinomio, $A_n(p) \rightarrow p$.
 - (d) Supongamos que para cualquier x $A_n x \rightarrow x$. Deducir de aquí que $\sup_n \|A_n\| < +\infty$.
 - (e) Elaborar y calcular en una computadora un algoritmo de $\|A_n\|$ para distintos n . ¿Confirma la suposición anterior los resultados de los cálculos?
29. En el espacio ℓ^2 se definen los siguientes operadores
- $$A_n x = (x_1/n, \dots, x_k/n, \dots)$$
- $$B_n x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots)$$
- ¿Cuál es el carácter de la convergencia de cada una de las sucesiones?
30. Sean X e Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría, entonces $T(X) = Y$.
31. Sean X e Y espacios de Banach y sea T una aplicación lineal de un subespacio lineal $D_T \subset X$ en Y . Probar que si D_T y el gráfico de T (en $X \times Y$) son cerrados, entonces T es acotado.

32. Sea X un espacio de Banach con cualquiera de las dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Si $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ implica que $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$, entonces las normas son equivalentes.
33. Definimos en $C^\infty(\Omega)$ (con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado) las siguientes normas:

$$\|u\|_m = \sup_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|.$$

Denotamos por $C^*(\Omega)$ el subconjunto de $C^\infty(\Omega)$ que consiste en todas las funciones tales que $\|u\|_m < \infty$ para todo $m \geq 1$. Definimos en $C^*(\Omega)$ la métrica $\rho(u, v) = \rho(u - v, 0)$ dada por

$$\rho(u, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|u\|_m}{1 + \|u\|_m}.$$

Si $P(D)$ es un operador diferencial con coeficientes constantes, determinar si $P(D) : C^*(\Omega) \rightarrow C^*(\Omega)$ es continuo.