

Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2002

OPERADORES ACOTADOS: OPERADOR ADJUNTO

Mientras más cerca se está del arquero, más lejos se está del gol - Renato Cesarini

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matriz asociada al operador $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Tx = Ax$. Probar que T' tiene como matriz asociada a A^t .
2. (i) Si $1 \leq p < \infty$, S y T son los shifts definidos en el ejercicio 4 de la práctica anterior, calcular S' y T' .
(ii) Si $J : \ell^2 \rightarrow c_0$, $J(x) = x$, probar que $J \in \mathcal{L}(\ell^2, c_0)$ y calcular J' .
3. Sean $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ dos conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Se definen los operadores
$$\rho : L^p(\tilde{\Omega}) \rightarrow L^p(\Omega), \quad e : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\tilde{\Omega}),$$
dados por $\rho(u) = u|_{\Omega}$ y $e(u)(t) = u(t)$ si $t \in \Omega$ y 0 en otro caso. Probar que ρ y e son acotados, calcular sus normas y calcular ρ' , e' .
4. Sea $\varphi \in L^\infty[0, 1]$ y sea $M_\varphi : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ el operador de multiplicación $M_\varphi(f) = \varphi f$. Calcular M'_φ .
5. Sea $V : L^1([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$ el operador de Volterra $Vu(x) = \int_0^x u(t)dt$. Probar que $V \in \mathcal{L}(L^1([0, 1]))$ y calcular V' .
6. Sea E un espacio vectorial normado, sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ entonces $(AB)' = B'A'$.
7. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$.
 - (i) $\|A\| = \|A'\|$
 - (ii) Si A es inversible entonces A' es inversible y $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
 - (iii) La aplicación $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F', E')$ dada por $\Phi(A) = A'$ es una isometría.
8. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Probar que:
 - (i) $R(A)^\perp = \ker(A')$
 - (ii) ${}^\perp R(A') = \ker(A)$
 - (iii) $\overline{R(A)} = {}^\perp \ker(A')$
 - (iv) $R(A') \subseteq (\ker(A))^\perp$

9. Sean E un espacio de Banach, $F \subset E$ subespacio y $\Phi : E' \rightarrow F'$ dada por $\Phi(\varphi) = \varphi|_F$.
- (i) Probar que $\Phi \in \mathcal{L}(E', F')$, Φ es suryectiva y calcular $\ker(\Phi)$.
 - (ii) Probar que si definimos $i : F \rightarrow E$ como $i(x) = x$, entonces $i' = \Phi$.
 - (iii) Si F es reflexivo, calcular Φ' .
10. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con $R(T)$ cerrado, entonces $R(T')$ es cerrado y

$$R(T') = (\ker(T))^\perp$$

11. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Entonces se dan los siguientes isomorfismos isométricos:

$$(E/S)' \cong S^\perp$$

$$E'/S^\perp \cong S'$$