

Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2002

OPERADORES NO ACOTADOS

Mostaza Merlo no admite caños

1. Si $D(A) = \{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2 < \infty\}$ y $A : D(A) \subset \ell^2 \rightarrow \ell^2$ es el operador definido por $Ax = (nx_n)_{n \geq 1}$.
 - (a) Probar que $D(A)$ es denso en ℓ^2 .
 - (b) Probar que A es lineal y no acotado.
 - (c) Hallar $D(A^*)$ y A^* .
 2. Si $D(A) = \{x \in \ell^2 : x \in \ell^1\}$ y $A : D(A) \subset \ell^2 \rightarrow \ell^1$ es el operador definido por $Ax = x$.
 - (a) Probar que $D(A)$ es denso en ℓ^2 .
 - (b) Probar que A es lineal y no acotado.
 - (c) Hallar $D(A^*)$ y A^* .
 3. Si $D(A) = \{f \in L^2[0, 1] : \int_0^1 |f(t^2)|^2 dt < \infty\}$ y $A : D(A) \subset L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ es el operador definido por $(Af)(t) = f(t^2)$.
 - (a) Probar que $D(A)$ es denso en $L^2[0, 1]$.
 - (b) Probar que A es lineal y no acotado.
 - (c) Hallar $D(A^*)$ y A^* .
 4. Si $D(A) = \{f \in L^2[0, 1] : f \in C[0, 1]\}$ y $A : D(A) \subset L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ es el operador definido por $(Af)(t) = t f(0)$.
 - (a) Probar que $D(A)$ es denso en $L^2[0, 1]$.
 - (b) Probar que A es lineal y no acotado.
 - (c) Hallar $D(A^*)$ y A^* .
- Definición:** Si E y F son espacios de Banach, un operador $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ se dice **cerrado** si $G(A)$ es cerrado en $E \times F$.
5. Si $D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : t f(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$ y $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ es el operador definido por $(Af)(t) = t f(t)$.
 - (a) Probar que $D(A)$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.
 - (b) Probar que A es lineal y no acotado.
 - (c) Hallar $D(A^*)$ y A^* .
 - (d) Probar que A es cerrado.
 6. Sean E y F espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un operador cerrado e inversible, entonces $A^{-1} : R(A) \subset F \rightarrow E$ es un operador cerrado.

7. Sean E y F espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un operador cerrado e inversible tal que $R(A) = F$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$
 8. Sean E y F espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un operador cerrado, entonces $\ker(A)$ es cerrado.
 9. Sean E y F espacios de Banach, un operador $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ es cerrado si y sólo si $D(A)$ con la norma $\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Ax\|_F$ es un espacio de Banach.
- Definición:** Un operador $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ se dice **clausurable** si existe una extensión cerrada de A , $\hat{A}$, o sea si existe $\hat{A} : D(\hat{A}) \subset E \rightarrow F$ un operador cerrado con $D(A) \subset D(\hat{A})$ y $\hat{A}|_{D(A)} = A$.
10. Sean E y F espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \rightarrow F$, $\hat{A} : D(\hat{A}) \subset E \rightarrow F$ operadores.
 - (a) $\hat{A}$ es una extensión de A si y sólo si $G(A) \subseteq G(\hat{A})$.
 - (b) Son equivalentes:
 - i. A es clausurable.
 - ii. $\overline{G(A)}$ no contiene puntos de la forma $(0, y)$ con $y \neq 0$ (i.e. $\overline{G(A)}$ es el gráfico de un operador).
 - iii. Si $(x_n)_n \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow 0$ y $Ax_n \rightarrow y$ entonces $y = 0$.
 - (c) Si A es clausurable, de todas las extensiones cerradas de A existe una mínima.
 11. Si $D(A) = C^1([0, 1])$ y $A : D(A) \subset L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ está dado por $Ax = x'$, probar que A es clausurable.
 12. Si E y F son espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ es un operador lineal, cerrado con dominio denso, entonces

$$\ker(A) = {}^\perp R(A^*), \quad \ker(A^*) = R(A)^\perp$$