

Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2002

OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT

...te largan a la cancha sin preguntarte si querés entrar...

PARTE 1: Operadores Acotados.

1. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces:

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle|, \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle|$$

2. Sean H un espacio de Hilbert, $T, S \in \mathcal{L}(H)$

(a) $(\alpha T + \beta S)' = \overline{\alpha} T' + \overline{\beta} S'.$

(b) $(ST)' = T' S'.$

(c) $\|T\| = \|T' T\|^{1/2}.$

3. Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se verifica:

(a) $\ker(T) = R(T')^\perp$

(b) $(\ker(T))^\perp = \overline{R(T')}$

(c) $\ker(T') = R(T)^\perp$

(d) $(\ker(T'))^\perp = \overline{R(T)}$

4. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n \in \mathcal{L}(H)$ tales que $\sup_n |\langle T_n x, y \rangle| < \infty \quad \forall x, y \in H$, entonces $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

5. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

(a) T es una isometría

(b) $T' T = I$

(c) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H$

Definiciones: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, H Hilbert.

(a) T es autoadjunto si $T' = T$

(b) T es normal si $T' T = T T'$

(c) T es unitario si es inversible y $T^{-1} = T'$

(d) T es positivo si $\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

6. (a) Si $\varphi \in L^\infty[0, 1]$, sea $M_\varphi : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ el operador de multiplicación. Calcular M'_φ , probar que M_φ es normal y caracterizar $\{\varphi \in L^\infty[0, 1] : M_\varphi \text{ es unitario}\}$.
 (b) Si $(\alpha_n)_n \in \ell^\infty$, sea $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dado por $Ax = (\alpha_n x_n)_n$. Calcular A' , probar que A es normal y caracterizar $\{(\alpha_n)_n \in \ell^\infty : A \text{ es unitario}\}$.
7. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:
 - (a) T es unitario.
 - (b) T' es unitario.
 - (c) T es una isometría suryectiva.
 - (d) T y T' son isometrías.
8. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Entonces:
 - (a) $\|T^2\| = \|T\|^2$
 - (b) $\ker(T) = \ker(T')$
 - (c) $T^2 = T \implies T$ es autoadjunto.
 - (d) $T^2 = 0 \implies T = 0$.
9. Si H es un espacio de Hilbert, sea $P \in \mathcal{L}(H)$ un operador no nulo tal que $P^2 = P$. Son equivalentes:
 - (a) $P' = P$
 - (b) P es normal
 - (c) $\|P\| = 1$
 - (d) $\ker(P) = R(P)^\perp$
10. Sean H un espacio de Hilbert, $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:
 - (a) $T'T$ y TT' son positivos.
 - (b) Si T es positivo, $S'TS$ es positivo.
11. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que $R(T)$ es cerrado si y sólo si T es acotado inferiormente en $(\ker(T))^\perp$.
12. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$.
 - (a) Si $\langle Tx, x \rangle = 0 \ \forall x \in H$ entonces $T = 0$.
 - (b) Dar un contraejemplo de (a) si H es Hilbert real.
 - (c) Si H es un Hilbert real y T es autoadjunto, entonces vale (a).
 - (d) T es normal si y sólo si $\|Tx\| = \|T'x\|$.
13. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n, T \in \mathcal{L}(H)$ normales.
 - (a) Si $T_n x \rightarrow Tx \ \forall x \in H$ entonces $T'_n x \rightarrow T'x \ \forall x \in H$.
 - (b) Dar un contraejemplo si T_n no son normales.

14. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

- (a) T es autoadjunto
- (b) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
- (c) $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
- (d) $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in H$
- (e) $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle \quad \forall x \in H$

Definición: Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se dice *isometría parcial* si $T|_{(\ker T)^\perp}$ es isometría.

15. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. T es isometría parcial si y sólo si $T'T$ es proyector.
16. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. ¿Batistuta o Crespo?
17. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ positivo. Entonces $\{x \in H : \langle Tx, x \rangle = 0\}$ es un subespacio de H .
18. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Si $x \in H$ es tal que $Tx \neq 0$ entonces $\forall n \in \mathbb{N}, T^n x \neq 0$.

PARTE 2: Operadores no Acotados.

Definiciones: Sean H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal.

- i. A se dice **positivo** si $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D(A)$.
- ii. A se dice **maximal positivo** si A es positivo y $R(I + A) = H$.
- iii. A se dice **simétrico** si $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in D(A)$.
- iv. A se dice **autoadjunto** si $A^* = A$ (o sea A es simétrico y $D(A) = D(A^*)$).

1. Sean H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo. Probar que A es maximal positivo.
2. Si $D(A) = \{(u_n)_n \in \ell^2 / \sum_{n \geq 1} n^2 |u_n|^2 < +\infty\}$ y $A : D(A) \subset \ell^2 \rightarrow \ell^2$ es el operador definido por $(Au)_n = nu_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Probar que A es maximal positivo.
3. Sea $A : D(A) \subset L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ dado por

$$D(A) = C_c^2(0, 1) = \{\varphi \in C^2(0, 1) / \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto} \subset (0, 1)\}$$

con $Au = -u''$. Probar que:

- (a) A es simétrico.
- (b) $A \neq A^*$.

- (c) A es positivo.
- (d) $R(I + A) \neq L^2[0, 1]$
- 4. Sea $A : D(A) \subset L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ con $D(A) = \{u \in C^1(a, b) \cap C[a, b] / u(a) = u(b) = 0\}$, $Au = iu'$. Probar que A es un operador simétrico no autoadjunto.
- 5. Sean H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador simétrico tal que $R(A) = H$. Entonces A es autoadjunto.
- 6. Sean H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador simétrico tal que $R(A)$ es denso en H . Entonces existe A^{-1} y A^{-1} es simétrico.
- 7. Sean H un espacio de Hilbert, $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador simétrico y positivo, $v \in H$. Sea $F : D(A) \subset H \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$F(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \Re(\langle u, v \rangle)$$

Si $u_0 \in D(A)$, son equivalentes:

- (a) $Au_0 = v$
 - (b) F tiene un mínimo en u_0 .
8. Sea $F : \{(u_n)_n \in \ell^2 / \sum_{n \geq 1} n^2 |u_n|^2 < +\infty\} \subset \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$F(u) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n |u_n|^2 - \Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}\right)$$

Probar que F tiene un único mínimo y hallarlo.

9. Sean H un espacio de Hilbert y $V : D(V) \subset H \rightarrow H$ una isometría. Entonces:
- (a) $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in D(V)$
 - (b) Son equivalentes:
 - i. $D(V)$ es cerrado.
 - ii. $R(V)$ es cerrado.
 - iii. $G(V)$ es cerrado.
 - iv. $V \in \mathcal{L}(H)$.