**Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2002**

**Operadores compactos – Espectro de un operador**

*Un equipo de fútbol es como una sábana corta.*– Renato Cesarini

1. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Son equivalentes
   (a) $T$ es compacto.
   (b) $\overline{T(A)}$ es compacto, para todo conjunto acotado $A \subset E$.
   (c) Para toda sucesión $(x_n)_{n \in I\!N}$ acotada, $(Tx_n)_{n \in I\!N}$ admite una subsucesión convergente.

2. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $T$ es compacto entonces $\forall\, x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ se verifica que $T(x_n) \to T(x)$.

3. (a) Sea $E$ un espacio de Banach. Si $\dim E = \infty$, $Id : E \to E$ no es compacto.
   (b) Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\dim E = \infty$ y $T$ es compacto, entonces $T$ no es inversible.

4. Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n \in I\!N}$, donde $1 < p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n \in I\!N} \in \ell^\infty$.
   (a) $T$ es compacto si y sólo si $\alpha_n \to 0$
   (b) $R(T)$ es cerrado si y sólo si $(\frac{1}{\alpha_n})_{n \in I\!N}$ es acotada (considerando sólo los $n$ tales que $\alpha_n \neq 0$).
   (c) Si $\alpha_n \to 0$, hallar $\sigma(T)$.
   (d) Hallar $\sigma(T)$ en el caso general ($\alpha_n \in \ell^\infty$).

5. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $T \in \mathcal{K}(E, F)$.
   (a) Si existe $S \subset R(T)$ subespacio cerrado entonces $\dim S < \infty$.
   (b) Si $R(T)$ es cerrado entonces $\dim R(T) < \infty$.
   (c) Si $\dim E = \infty$, entonces existe $(x_n)_{n \in I\!N} \in E$ tal que $\|x_n\| = 1\ \ \forall n$ y $Tx_n \to 0$. (Sug: $T$ acotado inferiormente $\Rightarrow R(T)$ cerrado)

6. (a) Si $T \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^1)$ entonces $T$ es compacto.
   (b) Sea $i : \ell^1 \to \ell^2$ la inclusión. ¿Es $i$ compacta?
   (c) Probar que la inclusión, $i : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ es compacta.

7. Sean $k \in C([a, b] \times [a, b])$ y $K : C[a, b] \to C[a, b]$ dado por

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy$$

   Probar que $K$ es un operador lineal acotado y compacto. (Sug: Arzela-Ascoli)
   ¿Qué sucede si se reemplaza $[a, b]$ por $\overline{U}$ con $U$ abierto y acotado en $I\!R^n$?

8. Sean $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ y $K \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$ el operador integral. Probar que:

(a) Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0,1])$, entonces $(e_{nm}(x,y) = e_n(x)\overline{e_m(y)})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0,1]\times[0,1])$.

(b) Si $k(x,y) = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} f_i(x) g_j(y)$, con $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $f_i, g_j \in L^2([0,1])$ entonces $\dim R(K) \leq N$.

(c) Si $k_n \to k$ en $L^2([0,1]\times[0,1])$, entonces $K_n \to K$ en $\mathcal{L}(L^2([0,1]))$.

(d) Si $k(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{nm} e_n(x)\overline{e_m(y)}$ y $k_N(x,y) = \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm} e_n(x)\overline{e_m(y)}$, entonces $k_N \to k$ en $L^2([0,1]\times[0,1])$.

(e) Deducir de todo lo anterior que $K$ es compacto.

9. Sean $U \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\varphi \in C(\overline{U})$ y $M_\varphi \in \mathcal{L}(C(\overline{U}))$ el operador de multiplicación.

   (a) Dar condiciones necesarias y suficientes para que $M_\varphi$ sea inversible.

   (b) Calcular $\sigma(M_\varphi)$

   (c) Dar condiciones necesarias y suficientes para que $M_\varphi$ sea compacto.

10. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach. Si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall K \subset E$ compacto $\exists T \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\dim R(T) < \infty$ y $\sup_{x\in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$, entonces para todo operador $A \in \mathcal{K}(F,E)$ existen operadores $A_n \in \mathcal{L}(F,E)$ tales que $\dim R(A_n) < \infty \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $A_n \to A$.

11. Sean $E$ un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$. Probar que $\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$ (conjugado de).

12. Si $1 < p < \infty$, sean $S$ y $T$ en $\mathcal{L}(\ell^p)$ los shifts a derecha e izquierda respectivamente.

    (a) Probar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| \leq 1\}$ y que si $|\lambda| < 1$ entonces $\lambda$ es un autovalor.

    (b) Calcular $\sigma(S)$

    (c) Probar que $S$ no tiene autovalores.

13. Sean $E$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$.

    (a) Si $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(T^n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

    (b) Si $T$ es inversible y $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$

14. Si $1 < p < \infty$, sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots)$$

    (a) Probar que $T$ no es compacto.

    (b) Probar que $T^2$ sí es compacto.

    (c) Calcular $\sigma(T)$

15. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ el operador de multiplicación. Hallar $\sigma(M_\varphi)$ en los siguientes casos:

(a) $\varphi$ continua en [0,1].

(b) $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

**Definición:**

*(a) Sean $E$ un espacio de Banach y $S \subseteq E$ un subespacio cerrado. Llamamos codimensión de $S$ en $E$ a la dimensión del espacio $E/S$ y notamos por* $\operatorname{codim}(S)$ *a dicha dimensión.*

*(b) Sean $E$ y $F$ dos espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se dice que $T$ es un operador de Fredholm si*

*i.* $\dim(\ker(T))$ *es finita.*

*ii.* $R(T)$ *es cerrado y* $\operatorname{codim}(R(T))$ *es finita.*

*(c) Sean $E$ y $F$ dos espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador de Fredholm. Llamamos índice de $T$ y notamos por* $\operatorname{ind}(T)$ *al número* $\dim(\ker(T)) - \operatorname{codim}(R(T))$.

16. Sean $E, F$ espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador de Fredholm, probar que $\operatorname{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \dim(\ker(T^*))$.

17. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, entonces $\operatorname{ind}(T) = n - m$

18. Sean $E, F$ espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador de Fredholm, probar que si $\dim(\ker(T^*)) = 0$ entonces $Tx = y$ tiene por lo menos una solución $\forall y \in F$.

19. (a) Considerar $S : \ell^2 \to \ell^2$ el operador Shift y $T$ su inverso a izquierda, mostrar que son operadores de Fredholm y calcular sus índices.
    (b) Para $S$ y $T$ como en (a) mostrar que $S^k$ y $T^k$ también son operadores de Fredholm y calcular sus índices.
    (c) Sea $T : E \to F$ un operador de rango finito, con $E$ y $F$ espacios de Banach. ¿Es $T$ un operador de Fredholm?

20. Sean $P_i, Q_i \in L^2[0,1] \quad \forall i = 1, \ldots, n$, $k(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)Q_i(t)$, donde $\{P_i\}_{i=1}^n$ son linealmente independientes. Sea la ecuación de Fredholm de segunda especie:

$$\varphi(s) = \int_0^1 k(s,t)\varphi(t)\,dt + f(s) \qquad ((I - K)\varphi = f)$$

Probar que la solución general tiene la forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s)$$

donde los $q_i$ verifican ciertas ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i = q_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Dar condiciones sobre los $(a_{ij})_{i,j}$ para que la ecuación tenga única solución $\forall f \in L^2[0,1]$

21. Probar que $f(x) - \int_0^{\pi} \sin(x+y) f(y)\, dy = g(x)$ tiene única solución $\forall g \in L^2[0,\pi]$

22. Hallar los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $f(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y) f(y)\, dy$ tiene solución no nula en $L^2[0,\frac{\pi}{2}]$ y hallar las soluciones. (Sug: generalizar el ejercicio 20 al caso $(I - \lambda K)\varphi = f$)

**Definición:** *Sea $H$ un espacio de Hilbert separable y sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $H$. Diremos que $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt si $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ converge, y notaremos*

$$\|T\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

23. Probar que:
    (a) $\|T\|_2$ no depende de la base elegida.
    (b) $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ y $\|T\| \leq \|T\|_2$.
    (c) $\langle S, T\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, Te_n\rangle$, es un producto interno que define $\|\cdot\|_2$ y hace de los operadores de Hilbert-Schmidt un espacio de Hilbert.

24. Probar que todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto y que si $T$ es de Hilbert-Schmidt y $S \in \mathcal{L}(H)$, entonces $ST$ y $TS$ son de Hilbert-Schmidt con $\|ST\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$ y $\|TS\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$.

25. (a) Si $K \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ es un operador integral, probar que entonces $K$ es de Hilbert-Schmidt y calcular $\|K\|_2$.
    (b) ¿Bajo qué condición sobre la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ el operador $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ dado por $Tx = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Hilbert-Schmidt?
    (c) Dar un ejemplo de un operador compacto que no sea de Hilbert-Schmidt.