Análisis Funcional

Práctica N°1: Espacios de Banach

1. (a) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio, entonces $\overline{S}$ es un subespacio.
   (b) Sean E un espacio de Banach, S un subespacio cerrado de E, entonces S, con la norma inducida por E, es un espacio de Banach.

2. (a) Sea $1 \leq p < \infty$. Probar que el espacio ℓ^p de sucesiones de números complejos (reales) $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ es un espacio de Banach separable si se considera la norma
$$\|(x_n)_n\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$
   (b) Probar que el espacio ℓ^∞ de sucesiones acotadas de números complejos (reales) es un espacio de Banach no separable con la norma
$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{1\leq n<\infty} |x_n|.$$
   (c) Si $0 < p < 1$, el espacio ℓ^p de sucesiones de números complejos (reales) $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ es un espacio métrico completo separable con distancia
$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$$
   (d) Si $1 \leq p \leq \infty$, $s_f = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \ \text{ p.c.t. } n\}$, entonces s_f es un subespacio de ℓ^p no cerrado. Más aún, es denso.

3. (a) Sean c y c_0 los espacios de sucesiones de números complejos (reales) convergentes y convergentes a 0, respectivamente, con la norma $\| \ \|_\infty$. Mostrar que son espacios de Banach.
   (b) Si $1 \leq p < q < \infty$ entonces $\ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ (inclusiones estrictas).
   (c) c_0 es un hiperplano cerrado de c.
   (d) Si $x \in \ell^p$ para algún p, $1 \leq p < \infty$, entonces $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

4. Sea $(X, \sum, \mu)$ un espacio de medida. Se consideran los espacios de funciones medibles $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, con la norma usual de estos espacios.

   (a) Si $1 \leq p < q \leq \infty$, $\mu(X) < \infty$ entonces $L^q(X) \subset L^p(X)$.
   (b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f \in L^\infty(X)$ entonces
$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$$

(c) Dar contraejemplos de (a) y (b) si $\mu(X) = \infty$.

(d) Si $1 \leq p < q < \infty$, $f \in L^\infty(X) \cap L^p(X)$ entonces $f \in L^q(X)$.

(e) Sean $1 \leq p < \infty, 1 < q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(X)$ entonces

$$\|f\|_p = \max\{\int_X |f\,g|\ d\mu : g \in L^q(X),\ \|g\|_q = 1\}$$

5. (a) Sea K un espacio topológico compacto y sea $C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \text{ continuas }\}$. Probar que $C(K)$ resulta un espacio de Banach dotado de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

(b) Si K es un compacto de $\mathbb{C}^n$, entonces $C(K)$ es separable.

6. Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado. Son equivalentes:

(a) E es Banach

(b) $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es completo

(c) $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ es completo

Definición:*Sean E un espacio vectorial, $\|\ \|$ y $\|\ \|'$ dos normas definidas en E. Decimos que las normas son equivalentes si y sólo si $\exists a, b > 0/$*

$$\|x\| \leq a\|x\|' \leq b\|x\| \quad \forall x \in E.$$

7. (a) Dos normas definidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si cada sucesión que converge con una, converge con la otra.

(b) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.

(c) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier norma que se defina sobre E hace de E un espacio de Banach.

(d) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces S es cerrado.

8. Si E es un espacio vectorial normado de dimensión finita, entonces $B(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es compacta.

9. Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\forall x \notin F\ \exists y_0 \in F$ que realiza la distancia, o sea

$$\|x - y_0\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

(Sug: ver que $y_0 \in S = \{y \in F : \|y\| \leq 2\|x\|\}$).

10. *Lema de Riesz:* Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio cerrado propio $(F \neq E)$, $0 < a < 1$, entonces $\exists x_a \in E,\ \|x_a\| = 1$ tal que $d(x_a, F) \geq a$.

(Sug: Sea $x \in E - F,\ d = d(x, F) > 0$, tomar $y_0 \in F$ tal que $0 < d(x, y_0) < \frac{d}{a}$ y probar que $x_a = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$ es el que sirve).

11. Sea E un espacio vectorial normado, $B(0,1)$ es compacta si y sólo si $\dim E < \infty$.

12. (a) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio. S tiene interior no vacío si y sólo si $S = E$.
    (b) Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces $\dim E > \aleph_0$.

13. Un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.

14. Sean E un espacio de Banach, $S, T \subset E$ subespacios cerrados con $\dim T < \infty$ entonces $S + T$ es cerrado.

15. Sea E un espacio vectorial normado, E es de Banach si y sólo si $\forall (x_n)_n \subset E$ vale que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

16. Sean E y F espacios vectoriales normados. En $E \times F$ se define
$$\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F.$$
    (a) $(E \times F, \| \ \|)$ es un espacio vectorial normado.
    (b) Si E y F son espacios de Banach, $E \times F$ resulta un espacio de Banach.
    (c) La inyección $J_E : E \to E \times F$ dada por $J_E(x) = (x, 0)$ y la proyección $P_E : E \times F \to E$ dada por $P_E(x,y) = x$ son ambas continuas. Lo mismo vale para J_F y P_F.

17. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado.
    (a) Probar que el cociente E/S es un espacio vectorial.
    (b) Se define la función $\|.\| : E/S \to I\!R_{\geq 0}$, $\|[x]\| = \|x + S\| = d(x, S)$.
    Probar que está bien definida y que es una norma en E/S.
    (c) Si $\Pi : E \to E/S$ es la proyección al cociente $\Pi(x) = [x]$, ver que Π es lineal, que $\|\Pi\| \leq 1$ y que Π es abierta.
    (d) Probar que E/S con la norma definida en (b) es un espacio de Banach.

18. Probar que los siguientes espacios, con las normas indicadas, resultan espacios de Banach. Por Ω entendemos un dominio compacto en $I\!R^N$.
    (a) $C^1(\Omega)$, $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^N \|f_{x_i}\|_\infty$.
    (b) $Lip(\Omega)$, $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$.
    (c) Espacios de Sobolev: $\Omega \subset I\!R$; $W^{1,p}(\Omega)$ con $\|f\| = \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ si
$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ f \in L^p(\Omega) / \quad \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \Big\}$$
    (d) Espacio de Variación Acotada.
$$BV([0,1]) = \{ f \in C([0,1]) / \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < +\infty \}$$
$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$$