

ANÁLISIS FUNCIONAL

Práctica N°2: Funciones lineales - Teorema de Hahn-Banach

1. Si E un espacio vectorial, $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ lineal, $\varphi \neq 0$, entonces $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{C}$.
2. (a) Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Son equivalentes:
 - i. φ es continua
 - ii. φ es continua en 0
 - iii. φ es acotada (i.e. $\sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty$)(b) φ es continua si y sólo si $\ker \varphi$ es cerrado.
3. Sean E un espacio vectorial normado sobre \mathbb{R} , $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal.
 - (a) Si φ es no acotada entonces toma todos los valores reales en cualquier entorno de 0.
 - (b) φ es continua si y sólo si $\forall c \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x : \varphi(x) < c\}$ y $\{x : \varphi(x) > c\}$ son abiertos.
 - (c) Si $A \subset E$ tiene interior no vacío y $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \geq a \forall x \in A$, entonces φ es continua.
4. Sean E un espacio vectorial normado, $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ lineal tales que para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ convergente a 0, resulta $(\varphi(x_n))_n$ acotada. Entonces φ es continua.
5. Sea $E^* = \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{C} / \varphi \text{ es lineal y continua}\}$. Entonces

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

es una norma sobre E^* , que hace de E^* un espacio de Banach.

6.

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{E^*} &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| < 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}\end{aligned}$$

$$\text{y } |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|$$

7. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas.

- (a) $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- (b) $\varphi : L^2[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt$
- (c) $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt$
- (d) $\varphi : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x) = x_1 + x_2$
- (e) $\varphi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x) = x_1 + x_2$

- (f) $\varphi : \ell^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$
- (g) $\varphi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$
- (h) $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$

8. Sean E un espacio de Banach, $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, $y \in E$, $y \notin \ker \varphi$.

(a) $E = \ker \varphi \oplus \langle y \rangle$, donde $\langle y \rangle$ significa el subespacio generado por y .

(b) $d(y, \ker \varphi) = \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|}$

(c) Si $H = \{x \in E : \varphi(x) = c\}$ entonces $d(0, H) = \frac{|c|}{\|\varphi\|}$

9. (a) En un espacio vectorial normado de dimensión finita toda funcional lineal es continua.

(b) Sea $L_0(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $\exists [a, b] \subset \mathbb{R}$ con $f(t) = 0 \forall t \notin [a, b]$. $(L_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ es un espacio vectorial normado. Además, si definimos $\varphi : L_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \int f(t) dt$ resulta φ una funcional lineal no acotada.

10. Sea en c_0 la familia $\{e^n\}_{n \geq 1}$ de sucesiones definidas por $e_i^n = \delta_{ni}$ y sea x^0 la sucesión dada por $x_i^0 = \frac{1}{i}$

(a) Verificar que $A = \{x^0, e^1, e^2, \dots, e^n, \dots\}$ es un conjunto l.i. de c_0

(b) Sea B una base algebraica de c_0 que contenga a A ; $S = A \cup \{b^j\}_{j \in J}$ con $b^j \notin A$ para todo j

Luego todo $x \in c_0$ se escribe de manera única como

$$x = \alpha_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^n + \sum_{i \in J} \alpha_i b^i$$

donde los coeficientes son nulos salvo finitos.

Si $f : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ se define por $f(x) = \alpha_0$, probar que f es una funcional lineal no continua.

11. Sean E un espacio vectorial normado, $\varphi, \psi \in E^*$ tales que $\varphi \cdot \psi \equiv 0$, entonces $\varphi \equiv 0$ ó $\psi \equiv 0$.

12. (a) Sea $y \in \ell^1$. Si definimos $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

resulta $\varphi \in c_0^*$ con $\|\varphi\|_{c_0^*} = \|y\|_1$.

(b) Recíprocamente, dada $\varphi \in c_0^*$, mostrar que la sucesión dada por $y_n = \varphi(e_n)$, donde $e_n = (\delta_k^n)_{k \geq 1}$ pertenece a ℓ^1 .

(c) Probar que las aplicaciones definidas en (i) y (ii) son una la inversa de la otra, y deducir que $c_0^* \cong \ell^1$ (isomorfismo isométrico).

- (d) De manera análoga, probar que $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ y que $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, si $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
13. (a) Sea I un conjunto de índices cualquiera, probar que $\ell^2(I)^* \cong \ell^2(I)$.
 (b) Si E y F son espacios vectoriales normados isométricamente isomorfos entonces sus duales también lo son.
14. Sea E un espacio de Banach y $S \subset E$ un subespacio cerrado.
 (a) Si S tiene dimensión finita, probar que S es complementado.
 (b) idem (a) si S tiene codimensión finita.
15. (a) Sea E un espacio vectorial normado, entonces $\forall x \in E$
- $$\|x\| = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*, \|\varphi\| = 1\}$$
- (b) Sea E un espacio vectorial normado, sean $x, y \in E$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y) \forall \varphi \in E^*$, entonces $x = y$.
16. Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio y $x_0 \in E$ tales que $d = d(x_0, S) > 0$. Probar que existe una funcional $\varphi \in E^*$, que verifica:
- $$\|\varphi\| = 1, \quad \varphi(x_0) = d, \quad \text{y} \quad \varphi|_S \equiv 0.$$
17. Sea E un espacio vectorial normado, $(x_n)_n \subset E$. Un punto y_0 es límite de combinaciones lineales $\sum_{j=1}^N c_j x_j$ si y sólo si $\forall \varphi \in E^*$ que verifique que $\varphi(x_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, vale que $\varphi(y_0) = 0$.
18. Sean E y F espacios vectoriales normados, probar que existe un isomorfismo entre $(E \times F)^*$ y $E^* \times F^*$.
19. Sea S un subespacio de E un espacio de Banach. Si S no es denso en E entonces existe $\phi \in E^*$, $\phi \neq 0$ tal que $\phi|_S \equiv 0$.
20. Sea E un espacio vectorial. Sean B y B' dos bases de Hamel (bases algebraicas) de E . Probar que el cardinal de B es igual al cardinal de B' (ese cardinal se denomina dimensión del espacio).
21. Dos espacios vectoriales son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.
22. Probar que la dimensión de l^∞ es c .
23. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que existe una sucesión infinita estrictamente decreciente de subespacios cerrados infinito dimensionales.
24. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que el espacio ℓ^∞ es isomorfo a un subespacio lineal de E .
25. Probar que la dimensión de un Banach de dimensión infinita es mayor o igual que c .
26. Sea E un Banach y S un subespacio de E , probar que

$$\overline{S} = \bigcap \{\ker(\phi) / \phi \in E^* \text{ } S \subset \ker(\phi)\}$$