# Análisis Funcional

## Práctica N°3: Principio de acotación uniforme
## Teorema de la aplicación abierta y del gráfico cerrado

1. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

   (i) $T$ es continuo.

   (ii) $T$ es continuo en 0.

   (iii) $T$ es acotado (i.e. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$)

2. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $T : E \to F$ lineal. Entonces

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in E,\ \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in E,\ \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\tfrac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E,\ x \neq 0\} \end{aligned}$$

   y $\quad \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$

3. Sea $A$ una matriz simétrica de $n \times n$. Considerar a $A$ como un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Probar que:

   (a) Para $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$, probar que $\|A\| = \max\{|\lambda| :\ \lambda$ es un autovalor de $A\}$.

   (b) Calcular $\|A\|$ si se considera $\mathbb{R}^n$ dotado de $\|.\|_1$.

   (c) Calcular $\|A\|$ si se considera $\mathbb{R}^n$ dotado de $\|.\|_\infty$.

4. **Operador Shift:** Sean $1 \leq p \leq \infty$, $S : \ell^p \to \ell^p$, $T : \ell^p \to \ell^p$ dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

   (i) Probar que $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es inyectivo. Calcular $\|S\|$.

   (ii) Probar que $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es suryectivo. Calcular $\|T\|$.

   (iii) $TS = I$, $ST \neq I$.

5. **Operadores de Multiplicación:**

   a) Si $\varphi \in C[0,1]$, sea $M_\varphi : C[0,1] \to C[0,1]$ definida por

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

   Probar que $M_\varphi \in \mathcal{L}(C[0,1])$ y calcular su norma. Si $\varphi(t) = t$, probar que $M_\varphi$ es un operador acotado de $L^p$ en $L^p$ y calcular su norma.

   b) Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$, definimos $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ por $M_\varphi(f) = \varphi\, f$. Probar:

   (i) $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$

   (ii) $M_\varphi^2 = M_\varphi \Leftrightarrow \varphi$ es una característica.

6. **Operadores integrales:** Si $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$, sea $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ dado por
$$(Kf)(s) = \int_0^1 k(s,t)\, f(t)\; dt$$
Probar que $K \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ y que $\|K\| \leq \|k\|_2$

7. Sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión de números complejos, $1 \leq p < \infty$, definimos $A : \ell^p \to \ell^p$ por $A((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$. Probar:
   (i) $A$ está bien definida $\Leftrightarrow\ \alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$
   (ii) $A$ es inyectiva $\Leftrightarrow\ \alpha_n \neq 0\ \forall n$
   (iii) $A$ es un isomorfismo $\Leftrightarrow\ (\frac{1}{\alpha_n})_n \in \ell^\infty$
   (iv) $\|A\| = \|\alpha\|_\infty$

8. Si $T, S, T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, entonces $(TS)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

9. Sea $X$ un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| \leq 1$. Probar que $(I + A)$ es inversible, $(I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y que su inversa viene dada por
$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$
donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X)$. Probar tambien que
$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

10. Sea $X$ un espacio de Banach y sea $T,\ T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Probar que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|S - T\| \leq 1/\|T^{-1}\|$, entonces $S$ es inversible, $S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, y
$$\|S^{-1} - T^{-1}\| < \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|S - T\|\|T^{-1}\|}.$$

11. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach y sean $x_n, x \in E,\ A_n, A \in \mathcal{L}(E, F)\ \forall n \in \mathbf{N}$. Si $x_n \to x$ y $A_n \to A$ entonces $A_n x_n \to Ax$

12. Sean $E$ y $F$ espacios vectoriales normados, $\mathcal{L}(E, F)$ es Banach si y sólo si $F$ es Banach.

13. Sea $E$ un espacio de Banach, sean $A_n, A, B_n, B \in \mathcal{L}(E)$.
    (i) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$
    (ii) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$ entonces $A_n B_n \to AB$

14. Sea $E$ un espacio de Banach, sea $P : E \to E$ lineal tal que $P^2 = P$, sean $S = \ker(P)$, $T = R(P)$. Probar que $P \in \mathcal{L}(E)$ si y sólo si $S$ y $T$ son cerrados.

15. Sean $E$ un espacio de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E)$ inversibles, $A \in \mathcal{L}(E)$ no inversible tales que $A_n \to A$, entonces $\|A_n^{-1}\| \to \infty$.

16. Sean $E$ un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\exists\ Q \in \mathcal{L}(E)/\ Q^2 = Q,\ R(Q) = S$.

17. Sea $E$ el espacio de Banach real $L^1((1,+\infty))$, sea $T: E \to E$ dado por $Tf(t) = \frac{1}{t} f(t)$. Probar que $T$ es acotado pero no abierto.

    (Sug: $0 \in T(B(0,1))$ no es punto interior)

18. a) Sean $E$ un espacio de Banach, $F$ un subespacio de $E$, $S$ un subespacio de $E^*$. Probar que:

    (i) $F^\perp$ es un subespacio cerrado de $E^*$.

    (ii) ${}^\perp S$ es un subespacio cerrado de $E$.

    (iii)${}^\perp(F^\perp) = \overline{F}$

    (iv) $({}^\perp S)^\perp \supset \overline{S}$

    b) Sea $s_f$ el subespacio de $\ell^\infty = (\ell^1)^*$ de sucesiones finitas. Probar que $({}^\perp s_f)^\perp$ contiene estrictamente a $\overline{s_f}$

19. Sean $E, F$ espacios vectoriales normados, $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$, entonces

$$\operatorname{dist}(x, \ker(T)) = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in (\ker(T))^\perp,\ \|\varphi\| \leq 1\}$$

20. Si $E$ y $F$ son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ entonces $\widehat{T} : E/\ker(T) \to F$, dado por $\widehat{T}([x]) = T(x)$, es lineal, continuo y $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

    Definición: Sea $E$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice acotado inferiormente si y sólo si $\exists c > 0 /\ \|Tx\| \geq c\,\|x\| \quad \forall x \in E$.

21. Sean $E$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$. Probar que:

    (i) Si $T$ es acotado inferiormente entonces $R(T)$ es cerrado.

    (ii) $T$ acotado inferiormente y suryectivo si y sólo si $T$ inversible.

    (iii) Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra, dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\ dt$$

    Probar que $V$ no es acotado inferiormente.

    Definición: Sea $E, F$ dos espacios de Banach, $T_n, T \in \mathcal{L}(E,F)$. Decimos que $T_n$ converge fuertemente a $T$ si para cualquier $x \in E$ se tiene que $T_n(x) \to T(x)$.

22. Si $T_n$ tiende fuertemente a $T$ y $x_n$ tiende a $x$ entonces $T_n(x_n) \to T(x)$.

23. Si $T_n$ tiende a $T$ fuertemente y $S_n$ tiende a $S$ fuertemente, entonces $T_nS_n$ tiende a $TS$ fuertemente.

24. Sean $E, F$ dos espacios de Banach. Sean $A_n \in \mathcal{L}(E,F)$ tales que $A_n(x)$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Probar que existe un $A \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que $A_n \to A$ fuertemente.

25. Sea $t_k = k/n$ una partición del intervalo $[0,1]$, y sea $x(t) \in C[0,1]$. Se define

$$A_n x(t) = \sum_{k=0}^{n} x(t_k) G_k^n(t)$$

donde $G_k^n(t) = \frac{(t-t_0).....(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})....(t-t_n)}{(t_k-t_0).....(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})....(t_k-t_n)}$.

(a) Demostrar que $A_n \in \mathcal{L}(C[0,1])$.

(b) Demostrar que $\|A_n\| = \max_{t\in[0,1]} \sum_{k=0}^{n} |G_k^n(t)|$.

(c) Mostrar que si $p(t)$ es un polinomio, $A_n(p) \to p$.

(d) Supongamos que para cualquier $x$ $A_n x \to x$. Deducir que $\sup_n \|A_n\| < +\infty$.

(e) Elaborar y calcular en una computadora un algoritmo de $\|A_n\|$ para distintos $n$. ¿Confirma la supocición anterior los resultados de los cálculos?

26. En el espacio $\ell^2$ se definen los siguientes operadores

$$A_n x = (x_1/n, \dots, x_k/n, \dots)$$

$$B_n x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots)$$

¿Cuál es el carácter de la convergencia de cada una de las sucesiones?

27. Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría, entonces $T(X) = Y$.

28. Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach y sea $T$ una aplicación lineal de un subespacio lineal $D_T \subset X$ en $Y$. Probar que si $D_T$ y el gráfico de $T$ (en $X \times Y$) son cerrados, entonces $T$ es acotado.

29. Sea $X$ un espacio de Banach con cualquiera de las dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Si $\|x_n\|_1 \to 0$ implica que $\|x_n\|_2 \to 0$, entonces las normas son equivalentes.

30. Definimos en $C^\infty(\Omega)$ (con $\Omega \subset I\!R^n$ un abierto acotado) las siguientes normas:

$$\|u\|_m = \sup_{\Omega} \sum_{0\le|\alpha|\le m} |D^\alpha u|.$$

Denotamos por $C^*(\Omega)$ el subconjunto de $C^\infty(\Omega)$ que consiste en todas las funciones tales que $\|u\|_m < \infty$ para todo $m \ge 1$. Definimos en $C^*(\Omega)$ la métrica $\rho(u, v) = \rho(u - v, 0)$ dada por

$$\rho(u, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|u\|_m}{1 + \|u\|_m}.$$

Si $P(D)$ es un operador diferencial con coeficientes constantes, determinar si $P(D) : C^*(\Omega) \to C^*(\Omega)$ es continuo.