Análisis Funcional

Práctica N^o 4: Operadores acotados: operador adjunto

1. Sea $A \in I\!R^{n\times m}$ la matriz asociada al operador $T : I\!R^m \to I\!R^n$, $Tx = Ax$. Probar que T^* tiene como matriz asociada a A^t.

2. (i) Si $1 \leq p < \infty$, S y T son los shifts definidos en el ejercicio 4 de la práctica anterior, calcular S^* y T^*.

   (ii) Si $J : \ell^2 \to c_0$, $J(x) = x$, probar que $J \in \mathcal{L}(\ell^2, c_0)$ y calcular J^*.

3. Sean $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ dos conjuntos medibles de $I\!R^n$. Se definen los operadores

$$\rho : L^p(\tilde{\Omega}) \to L^p(\Omega), \qquad e : L^p(\Omega) \to L^p(\tilde{\Omega}),$$

   dados por $\rho(u) = u\,|_\Omega$ y $e(u)(t) = u(t)$ si $t \in \Omega$ y 0 en otro caso. Probar que ρ y e son acotados, calcular sus normas y calcular ρ^*, e^*.

4. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de multiplicación $M_\varphi(f) = \varphi f$. Calcular M_φ^*.

5. Sea $V : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$ el operador de Volterra $Vu(x) = \int_0^x u(t)dt$. Probar que $V \in \mathcal{L}(L^1([0,1]))$ y calcular V^*.

6. Sea E un espacio vectorial normado, sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ entonces $(AB)^* = B^*A^*$.

7. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Probar que:

   (i) $R(A)^\perp = \ker(A^*)$ (ii) ${}^\perp R(A^*) = \ker(A)$

   (iii) $\overline{R(A)} = {}^\perp\ker(A^*)$ (iv) $R(A^*) \subseteq (\ker(A))^\perp$

8. Sean E un espacio de Banach, $F \subset E$ subespacio y $\Phi : E^* \to F^*$ dada por $\Phi(\varphi) = \varphi|_F$.

   (i) Probar que $\Phi \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$, Φ es suryectiva y calcular $\ker(\Phi)$.

   (ii) Probar que si definimos $i : F \to E$ como $i(x) = x$, entonces $i^* = \Phi$.

   (iii) Si F es reflexivo, calcular Φ^*.

9. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con $R(T)$ cerrado, entonces $R(T^*)$ es cerrado y

$$R(T^*) = (\ker(T))^\perp$$

10. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Entonces se dan los siguientes isomorfismos isométricos:

$$(E/S)^* \cong S^\perp, \qquad E^*/S^\perp \cong S^*$$