Análisis Funcional

Práctica N°5: Espacios de Hilbert

1. Sean H un espacio vectorial y $a : H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal, hermitiana y semidefinida positiva.

   (a) Probar la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

   $$|a(x,y)| \le a(x,x)^{1/2}\, a(y,y)^{1/2} \qquad \forall x, y \in H$$

   (b) Probar la desigualdad triangular:

   $$a(x+y, x+y)^{1/2} \le a(x,x)^{1/2} + a(y,y)^{1/2} \qquad \forall x, y \in H$$

   (c) Si además $a(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (o sea a es definida positiva) entonces $\|x\| = a(x,x)^{1/2}$ es una norma en H.

2. Probar que son espacios de Hilbert:

   (a) $\mathbb{C}^n$, con producto escalar $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$

   (b) ℓ^2, con producto escalar $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$

   (c) $L^2(X)$, donde $(X, \sum, \mu)$ es un espacio de medida, con producto escalar

   $$\langle f, g\rangle = \int_X f\, \overline{g}\; d\mu$$

   (d) $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ (definido en el Ejercicio 18 (c) Práctica 1; donde las funciones son a valores reales), con el producto escalar

   $$\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg + \int_\Omega \nabla f \nabla g$$

3. Si H es un espacio vectorial y $a : H \times H \to \mathbb{C}$ es sesquilineal y hermitiana, vale la fórmula de polarización, $\forall x, y \in H$:

   $$a(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{a(x+y, x+y) - a(x-y, x-y) + i\Big[a(x+iy, x+iy) - a(x-iy, x-iy)\Big]\Big\}$$

   En particular, en H Hilbert, $\forall x, y \in H$:

   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big)\Big\}$$

4. (a) Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio de Banach. Probar que existe un producto escalar que induce la norma de E (y que hace de E un espacio de Hilbert) si y sólo si $\| \ \|$ verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad \forall x, y \in E$$

(b) $(\ell^p, \| \ \|_p)$, si $p \neq 2$ y $(C[0,1], \| \ \|_\infty)$ no son espacios de Hilbert.

5. Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{e_n\}_n$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

(a) $\{e_n\}_n$ es ortonormal maximal.

(b) Si $x \in H$, $x \perp e_n \ \ \forall n$, entonces $x = 0$.

6. Ortogonalización de Gram-Schmidt: Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $\{b_n\}_n$ es un subconjunto linealmente independiente de H que genera un subespacio denso en H.

(a) Definamos $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ y, una vez definido e_n,

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle b_{n+1}, e_k \rangle \, e_k}{\left\| b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle b_{n+1}, e_k \rangle \, e_k \right\|}$$

Probar que $\{e_n\}_n$ es una base de H.

(b) Si $\{f_n\}_n$ es un conjunto ortonormal tal que para cada $n \in I\!N$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, con $\lambda_n \neq 0$, tales que $f_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, b_i$ entonces $f_n = \alpha_n \, e_n$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1 \ \ \forall n$.

7. Desigualdad de Bessel: Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ un conjunto ortonormal. Probar que

(a) $\forall x \in H$ y para cada $N \in I\!N$, $\sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(b) $\forall x \in H$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

8. Sea H un espacio de Hilbert, si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de H entonces $\forall x \in H$ vale:

(a) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$

(b) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

(c) Si $y \in H$, $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, \overline{\langle y, e_n \rangle}$

9. (a) Probar que $\{e^n\}_{n \in I\!N} \subset \ell^2$ dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$ es una base de ℓ^2.

(b) Probar que $\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \}$ es una base de $L^2[-\pi, \pi]$.

(c) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $L^2[-1,1]$ considerado como $I\!R$ espacio vectorial.

10. (a) El conjunto $\{1, x, x^2, \ldots\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2[-1,1]$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n\in I\!N}$ satisface que

$$e_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

donde $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,(\frac{d}{dx})^n (x^2-1)^n$ son los polinomios de Legendre.

(b) El conjunto $\{x^n e^{-x^2/2} : n \geq 0\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2(-\infty,\infty)$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n\in I\!N}$ satisface que

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}}\, H_n(x)\, e^{-x^2/2}$$

donde $H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ son los polinomios de Hermite y $H_n' = 2n\, H_{n-1}$.

11. Sean H y K espacios de Hilbert. En $H \times K$ definimos

$$\langle (h_1,k_1),(h_2,k_2)\rangle = \langle h_1,h_2\rangle_H + \langle k_1,k_2\rangle_K$$

Probar que $(H\times K, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert, y que $H\times\{0\}$ y $\{0\}\times K$ son cerrados y ortogonales en $H\times K$.

12. Sean H un espacio de Hilbert, $S\subset H$ un subespacio cerrado propio.

(a) Probar que existe $x\in H-S$ tal que $x\perp S$.

(b) Si $S^\perp = \{x\in H : x\perp S\}$ entonces $S^\perp$ es un subespacio cerrado y $S\oplus S^\perp = H$.

(c) $(S^\perp)^\perp = S$

(d) Dar contraejemplos de (b) y (c) si S no es cerrado.

13. (a) Sean H un espacio de Hilbert, $D\subset H$ un subconjunto. El subespacio generado por D es denso en H si y sólo si se verifica

$$\langle x,y\rangle = 0 \quad \forall y\in D \Rightarrow x=0$$

(b) En ℓ^2 sea $S = \left\{x\in\ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\right\}$. Probar que S es denso en ℓ^2.

14. Sean S y T subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert H. Probar que $S\oplus T$ es cerrado.

15. Si $\{x_n\}_{n\in I\!N}$ es un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert H y $\{y_n\}_{n\in I\!N}$ es una sucesión ortogonal en H que verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n-y_n\|^2 < 1,$$

entonces $\{y_n\}_{n\in I\!N}$ es también completo.

FAMILIAS SUMABLES. Sean E un espacio de Banach, $(x_i)_{i\in I}$ una familia en E.

Definición: $\sum_{i\in I} x_i$ *es de Cauchy si y sólo si* $\forall\varepsilon > 0\ \exists F \subset I$, *$F$ finito, tal que si G_1 y G_2 son subconjuntos finitos de I que contienen a F entonces*

$$\Big\| \sum_{i\in G_1} x_i - \sum_{i\in G_2} x_i \Big\| < \varepsilon$$

16. Probar que la siguiente definición es equivalente a la anterior: $\forall\varepsilon > 0\ \exists F \subset I$, F finito, tal que si $F \subset G \subset I$, G finito, entonces

$$\Big\| \sum_{i\in G-F} x_i \Big\| < \varepsilon$$

Definición: $\sum_{i\in I} x_i = x \quad (x \in E)$ *si y sólo si* $\forall\varepsilon > 0\ \exists F \subset I$, *$F$ finito, tal que si $F \subset G \subset I$, G finito, entonces*

$$\Big\| \sum_{i\in G} x_i - x \Big\| < \varepsilon$$

En este caso se dice que la familia es sumable.

17. En un espacio de Banach E, $\sum_{i\in I} x_i$ es de Cauchy si y sólo si $(x_i)_{i\in I}$ es sumable.

18. Si $x = \sum_{i\in I} x_i$, $y = \sum_{i\in I} y_i$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$x + y = \sum_{i\in I} (x_i + y_i) \qquad \wedge \qquad \lambda x = \sum_{i\in I} (\lambda x_i)$$

19. Si $x = \sum_{i\in I} x_i$, $y \in H$, con H Hilbert, entonces

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y\rangle$$

20. Si $\sum_{i\in I} x_i$ es de Cauchy entonces $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ es a lo sumo numerable.

21. $\ell^2(I) = \{(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{C} \colon \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty\}$, con $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} x_i\, \overline{y}_i$, es un espacio de Hilbert. (enunciar y probar Hölder para que el producto escalar esté bien definido)

22. Pitágoras: Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia ortogonal en un espacio de Hilbert H. $(x_i)_{i\in I}$ es sumable si y sólo si $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ es sumable y en tal caso

$$\Big\| \sum_{i\in I} x_i \Big\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2$$

23. Desigualdad de Bessel: Sea H un espacio de Hilbert.Si $(x_i)_{i\in I}$ es una familia ortonormal en H y $x \in H$ entonces $(|\langle x, x_i\rangle|^2)_{i\in I}$ es una familia sumable y

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

24. Demostrar que todo espacio de Hilbert H admite una base y que dos bases cualesquiera son coordinables.

25. (a) Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si todo sistema ortonormal es a lo sumo numerable.
    (b) Si $\#(I) > \aleph_0$, $\ell^2(I)$ no es separable.

26. Sea H un espacio de Hilbert.
    (a) Si $(x_i)_{i\in I}$ es una base de H, entonces $\forall x \in H$

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle \, x_i \quad \wedge \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2$$

    (b) Si $(x_i)_{i\in I}$ es una base de H, entonces H es isométricamente isomorfo a $\ell^2(I)$.
    (c) Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a $\ell^2(I\!N)$.