Análisis Funcional

Práctica N°6: Topologías débiles

1. Sea E un espacio de Banach, sean $x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$. Probar que $\|x_n\|$ está acotada y que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

   (Sug: usar Principio de Acotación uniforme y la inclusión canónica en el bidual)

2. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E^*$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\varphi_n \to \varphi$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

3. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$.

   (a) Si $x_n \to x$ entonces $x_n \xrightarrow{w} x$.

   (b) Si $\dim E < \infty$, $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.

4. (a) Sea E un espacio de Banach, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal. φ es continua si y sólo si φ es continua de (E, w) en $\mathbb{C}$.

   (b) Sean E y F espacios de Banach, $T : E \to F$ lineal. T es continua si y sólo si T es continua de (E, w) en (F, w).

5. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_n\}$ que tiende fuertemente a x.

6. Sean E un espacio de Banach, $x_n \in E$. La sucesión $\{x_n\}_n$ converge en E si y sólo si $\{x_n\}_n$ converge débil y uniformemente en $\{\varphi \in E^* : \|\varphi\| \leq 1\}$.

7. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, sea $S = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. En (E, w), S tiene interior vacío.

8. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E^*$, tales que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$. Probar que $\|\varphi_n\|$ está acotada y que $\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\|$.

9. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E^*$. Si $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ y $x_n \to x$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

10. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E^*$.

    (a) $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

    (b) Si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.

11. Definamos $\varphi_n : E \to \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$.

    (a) Si $E = \ell^2$ probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$. ¿$\varphi_n \to 0$?

(b) Si $E=\ell^\infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E^*}, \forall n \in I\!N$ pero que $(\varphi_n)_{n\in I\!N}$ no tiene ninguna subsucesión w^*-convergente. ¿Contradice esto el hecho de que (B_{E^*}, w^*) es compacta?

12. Sean $\varphi_n : C([-1,1]) \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\varphi_n(f) = f(\frac{-1}{n}) - f(\frac{1}{n})$$

Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

13. Si $1 \le p < \infty$, en ℓ^p, sea e^n dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$. Probar que:

    (a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

    (b) Si $p=1$, $e^n \xrightarrow{w^*} 0$, $e^n \not\xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

14. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces

$$x^n \xrightarrow{w} x \Longleftrightarrow \sup \|x^n\|_p < \infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \quad \forall k$$

15. (a) Si $1 < p < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^p[0,1]$. Entonces

$$\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Longleftrightarrow \sup \|\varphi_n\|_p < \infty \ \wedge \ \int_0^a \varphi_n(t)\,dt \to \int_0^a \varphi(t)\,dt \quad \forall a \in [0,1]$$

    (b) Si $\varphi_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2[0,1]$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

16. Sean H un espacio de Hilbert, $x_n, x \in H$.

    (a) $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad \forall y \in H$

    (b) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $e_n \xrightarrow{w} 0$

    (c) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $x_n \to x$

    (d) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m\rangle \to \langle x, e_m\rangle \quad \forall m \in I\!N$

    (e) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces existe una subsucesión x_{n_k} tal que su media aritmética $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \cdots + x_{n_k})$ verifica que $z_k \to x$.

17. Sean $\varphi_n, \varphi \in L^\infty[0,1]$, $M_{\varphi_n}, M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ los operadores de multiplicación. Probar que

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \Longleftrightarrow M_{\varphi_n}(f) \xrightarrow{w} M_\varphi(f) \quad \forall f \in L^2[0,1]$$

18. $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\| \ \|_\infty$ pero no en la topología w^*.

19. Sea, para cada $n \in I\!N$, $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$

    (a) Probar que, $\forall n \in I\!N$, $\varphi_n \in c_0^*$ y calcular su norma.

    (b) Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ y que $\varphi_n \not\xrightarrow{w} 0$.

    (c) $c_0 \supset \ {}^\circ\langle\{\varphi_1\}\rangle \supset \ {}^\circ\langle\{\varphi_1, \varphi_2\}\rangle \supset \ldots \supset \ {}^\circ\langle\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}\rangle \supset \ \ldots$, y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿ Ocurre lo mismo con ${}^\circ\langle\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty\rangle$?

20. Sean E y F espacios de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E,F)$. Si para cada $x \in E$ y para cada $\varphi \in F^*$ la sucesión $\{\varphi(A_n x)\}$ está acotada, entonces $\{\|A_n\|\}$ está acotada.

21. Sean E un espacio de Banach reflexivo, $\varphi \in E^*$.

    (a) Probar que $\exists x \in E, x \neq 0$ tal que $b\varphi(x) = \|\varphi\| \, \|x\|$

    (b) Si M es un subespacio cerrado propio de E^*, $\exists x \in {}^\circ M$, $\|x\| = 1$ tal que $\varphi(x) = d(\varphi, M)$

22. Si E es un espacio de Banach separable y $\{\varphi_n\}$ es una sucesión acotada en E^* entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_k$ w^*-convergente.

    (Sug: Si $\{x_k\}$ es denso en E, $\{\varphi_n(x_1)\}_n$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_1}(x_1)\}_{n_1}$, también, $\{\varphi_{n_1}(x_2)\}_{n_1}$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_2}$, seguir inductivamente y ver que $\{\varphi_{n_n}\}_n$ es w^*-convergente)

23. Sea E un espacio de Banach reflexivo.

    (a) Si $\{x_n\}_n$ está acotada en E, entonces tiene una subsucesión $w-$convergente.
    (Sug: tomar S el subespacio cerrado generado por $\{x_n\}_n$, ver que S^* es separable, usar ejercicio anterior e inclusión canónica en el bidual)

    (b) Si $\{\varphi_n\}_n$ está acotada en E^*, entonces tiene una subsucesión w^*-convergente.

24. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo, existe $\{\varphi_n\} \in E^*$, $\|\varphi_n\| = 1$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.