Análisis Funcional

Práctica N°7: Operadores en espacios de Hilbert

1. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces:
$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|, \qquad \|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$$

2. Sean H un espacio de Hilbert, $T, S \in \mathcal{L}(H)$
   (a) $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$.
   (b) $(ST)^* = T^* S^*$.
   (c) $\|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$.

3. Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se verifica:
   (a) $\ker(T) = R(T^*)^\perp$
   (b) $(\ker(T))^\perp = \overline{R(T^*)}$
   (c) $\ker(T^*) = R(T)^\perp$
   (d) $(\ker(T^*))^\perp = \overline{R(T)}$

4. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n \in \mathcal{L}(H)$ tales que $\sup\limits_n |\langle T_n x, y\rangle| < \infty \quad \forall x, y \in H$, entonces $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty$.

5. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:
   (a) T es una isometría
   (b) $T^*T = I$
   (c) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H$

Definiciones: *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, H Hilbert.*

(a) T es autoadjunto si $T^* = T$
(b) T es normal si $T^*T = TT^*$
(c) T es unitario si es inversible y $T^{-1} = T^*$
(d) T es positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \ \ \forall x \in H$

6. (a) Si $\varphi \in L^\infty[0,1]$, sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de multiplicación. Calcular M_φ^* , probar que M_φ es normal y caracterizar $\{\varphi \in L^\infty[0,1] : M_\varphi$ es unitario $\}$.
   (b) Si $(\alpha_n)_n \in \ell^\infty$, sea $A : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $Ax = (\alpha_n x_n)_n$. Calcular A^*, probar que A es normal y caracterizar $\{(\alpha_n)_n \in \ell^\infty : A$ es unitario $\}$.

7. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:
   (a) T es unitario.
   (b) T^* es unitario.
   (c) T es una isometría suryectiva.
   (d) T y T^* son isometrías.

8. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Entonces:
   (a) $\|T^2\| = \|T\|^2$
   (b) $\ker(T) = \ker(T^*)$
   (c) $T^2 = T \implies T$ es autoadjunto.
   (d) $T^2 = 0 \implies T = 0$.

9. Si H es un espacio de Hilbert, sea $P \in \mathcal{L}(H)$ un operador no nulo tal que $P^2 = P$. Son equivalentes:
   (a) $P^* = P$
   (b) P es normal
   (c) $\|P\| = 1$
   (d) $\ker(P) = R(P)^\perp$

10. Sean H un espacio de Hilbert, $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:
    (a) T^*T y TT^* son positivos.
    (b) Si T es positivo, S^*TS es positivo.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que $R(T)$ es cerrado si y sólo si T es acotado inferiormente en $(\ker(T))^\perp$.

12. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$.
    (a) Si $\langle Tx, x\rangle = 0 \;\; \forall x \in H$ entonces $T = 0$.
    (b) Dar un contraejemplo de (a) si H es Hilbert real.
    (c) Si H es un Hilbert real y T es autoadjunto, entonces vale (a).
    (d) T es normal si y sólo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

13. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n, T \in \mathcal{L}(H)$ normales.
    (a) Si $T_n x \to Tx \;\; \forall x \in H$ entonces $T_n^* x \to T^* x \;\; \forall x \in H$.
    (b) Dar un contraejemplo si T_n no son normales.

14. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:
    (a) T es autoadjunto
    (b) $\langle Tx, x\rangle \in I\!R \ \ \forall x \in H$
    (c) $\langle x, Tx\rangle \in I\!R \ \ \forall x \in H$
    (d) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \ \forall x, y \in H$
    (e) $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle \ \ \forall x \in H$

15. Sean H un espacio de Hilbert, $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ proyectores. Son equivalentes:
    (a) $R(P) \perp R(Q)$
    (b) $PQ = 0$
    (c) $QP = 0$
    (d) $P(R(Q)) = 0$
    (e) $Q(R(P)) = 0$

Definición: *Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se dice isometría parcial si $T|_{(\ker T)^\perp}$ es isometría.*

16. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. T es isometría parcial si y sólo si T^*T es proyector.

17. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto.

18. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ positivo. Entonces $\{x \in H : \langle Tx, x\rangle = 0\}$ es un subespacio de H.

19. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Si $x \in H$ es tal que $Tx \neq 0$ entonces $\forall n \in I\!N, \ \ T^n x \neq 0$.