Análisis Funcional

Práctica N°8: Operadores compactos – Espectro de un operador

1. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Son equivalentes
   (a) T es compacto.
   (b) $\overline{T(A)}$ es compacto, para todo conjunto acotado $A \subset E$.
   (c) Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.

2. (a) Sea E un espacio de Banach. Si $\dim E = \infty$, $Id : E \to E$ no es compacto.
   (b) Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\dim E = \infty$ y T es compacto, entonces T no es inversible.

3. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{K}(E, F)$.
   (a) Si existe $S \subset R(T)$ subespacio cerrado entonces $\dim S < \infty$.
   (b) Si $R(T)$ es cerrado entonces $\dim R(T) < \infty$.
   (c) Si $\dim E = \infty$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tal que $\|x_n\| = 1 \;\; \forall n$ y $Tx_n \to 0$.

4. (a) Si $T \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^1)$ entonces T es compacto.
   (b) Sea $i : \ell^1 \to \ell^2$ la inclusión. ¿Es i compacta?
   (c) Probar que la inclusión, $i : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ es compacta.

5. Sean $k \in C([a, b] \times [a, b])$ y $K : C[a, b] \to C[a, b]$ dado por
$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)\,dy$$
   Probar que K es un operador lineal acotado y compacto. (Sug: Arzela-Ascoli)

6. Sean $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ y $K \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$ el operador integral asociado a k. Probar que:
   (a) Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0, 1])$, entonces $(e_{nm}(x, y) = e_n(x)\overline{e_m(y)})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0, 1] \times [0, 1])$.
   (b) Si $k(x, y) = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} f_i(x)g_j(y)$, con $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $f_i, g_j \in L^2([0, 1])$; $\dim R(K) \le N$.
   (c) Si $k_n \to k$ en $L^2([0, 1] \times [0, 1])$, entonces $K_n \to K$ en $\mathcal{L}(L^2([0, 1]))$.
   (d) Si $k(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{nm} e_n(x)\overline{e_m(y)}$ y $k_N(x, y) = \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm} e_n(x)\overline{e_m(y)}$, entonces $k_N \to k$ en $L^2([0, 1] \times [0, 1])$.
   (e) Deducir que K es compacto.

7. Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador de Fredholm, probar que $\text{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \dim(\ker(T^*))$.

8. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, entonces $\text{ind}(T) = n - m$

9. Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador de Fredholm, probar que si $\dim(\ker(T^*)) = 0$ entonces $Tx = y$ tiene por lo menos una solución $\forall y \in F$.

10. (a) Considerar $S : \ell^2 \to \ell^2$ el operador Shift y T su inverso a izquierda, mostrar que son operadores de Fredholm y calcular sus índices.
    (b) Para S y T como en (a) mostrar que S^k y T^k también son operadores de Fredholm y calcular sus índices.
    (c) Sea $T : E \to F$ un operador de rango finito, con E y F espacios de Banach. ¿Es T un operador de Fredholm?

11. Sean $P_i, Q_i \in L^2[0,1] \quad \forall i = 1, \ldots, n$, $k(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)Q_i(t)$, donde $\{P_i\}_{i=1}^n$ son linealmente independientes. Sea la ecuación de Fredholm de segunda especie:

$$\varphi(s) = \int_0^1 k(s,t)\varphi(t)\,dt + f(s) \qquad ((I - K)\varphi = f)$$

Probar que la solución general tiene la forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s)$$

donde los q_i verifican ciertas ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j + b_i = q_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Dar condiciones sobre los $(a_{ij})_{i,j}$ para que la ecuación tenga única solución cualquiera sea f en $L^2[0,1]$.

12. Probar que $f(x) - \int_0^{\pi} \sin(x+y)f(y)\,dy = g(x)$ tiene única solución $\forall g \in L^2[0,\pi]$

13. Hallar los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $f(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y)f(y)\,dy$ tiene solución no nula en $L^2[0,\frac{\pi}{2}]$ y hallar las soluciones. (Sug: generalizar el ejercicio 11 al caso $(I - \lambda K)\varphi = f$)

Definición: *Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. Diremos que $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt si $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ converge, y notaremos*

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}.$$

14. Para un espacio de Hilbert H y un operador de Hilbert-Schmidt T, probar que:

    (a) $\|T\|_2$ no depende de la base elegida.

    (b) $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ y $\|T\| \leq \|T\|_2$.

    (c) $\langle S, T\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, Te_n\rangle$, es un producto interno que define $\|\cdot\|_2$ y hace de los operadores de Hilbert-Schmidt un espacio de Hilbert.

15. Probar que todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto y que si T es de Hilbert-Schmidt y $S \in \mathcal{L}(H)$, entonces ST y TS son de Hilbert-Schmidt con $\|ST\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$ y $\|TS\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$.

16. (a) Si $K \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ es un operador integral, probar que entonces K es de Hilbert-Schmidt y calcular $\|K\|_2$.

    (b) ¿Bajo qué condición sobre la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ el operador $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ dado por $Tx = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Hilbert-Schmidt?

    (c) Dar un ejemplo de un operador compacto que no sea de Hilbert-Schmidt.

17. Sean $U \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\varphi \in C(\overline{U})$ y $M_\varphi \in \mathcal{L}(C(\overline{U}))$ el operador de multiplicación.

    (a) Dar condiciones necesarias y suficientes para que M_φ sea inversible.

    (b) Calcular $\sigma(M_\varphi)$

    (c) Dar condiciones necesarias y suficientes para que M_φ sea compacto.

18. Sean E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$. Probar que $\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$ (conjugado de).

19. Si $1 < p < \infty$, sean S y T en $\mathcal{L}(\ell^p)$ los shifts a derecha e izquierda respectivamente.

    (a) Probar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| \leq 1\}$ y que si $|\lambda| < 1$ entonces λ es un autovalor.

    (b) Calcular $\sigma(S)$ y probar que S no tiene autovalores.

20. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$.

    (a) Si $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(T^n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

    (b) Si T es inversible y $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$

21. Si $1 < p < \infty$, sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots)$$

    (a) Probar que T no es compacto pero que T^2 sí lo es.

    (b) Calcular $\sigma(T)$

22. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ el operador de multiplicación. Hallar $\sigma(M_\varphi)$ en los siguientes casos:

    (a) φ continua en $[0,1]$

    (b) $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

23. Sea H un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador normal y λ es un autovalor de T entonces $\overline{\lambda}$ es un autovalor de T^*. Dar un contraejemplo si T no es normal.

24. Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador autoadjunto con $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$ entonces T es positivo.

25. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

    (a) Si $\exists (x_n)_n \subset E$, $\|x_n\| = 1 \;\; \forall n$ tal que $Tx_n - \lambda x_n \to 0$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$.

    (b) Si E es Hilbert, T normal y $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\exists (x_n)_n \subset E$, $\|x_n\| = 1 \;\; \forall n$ tal que $Tx_n - \lambda x_n \to 0$

    (c) Si E es Hilbert y T normal, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda I$ no es acotado inferiormente$\}$

26. Sea $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ dado por $(Tf)(t) = tf(t)$. Probar que:

    (a) T no es compacto.

    (b) T es positivo y no tiene autovalores.

    (c) $\sigma(T) = [0,1]$ (Sug: ej. anterior)

27. Sea H un espacio de Hilbert.

    (a) Si $U \in \mathcal{L}(H)$ es un operador unitario entonces $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \; |\lambda| = 1\}$

    (b) Si $P \in \mathcal{L}(H)$ es un proyector no trivial, $\sigma(P)$ está formado por los autovalores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.