Análisis Funcional

Práctica N°9: Cálculo funcional

1. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo, entonces $\|A^{1/2}\| = \|A\|^{1/2}$.

2. Sean H un espacio de Hilbert, $A,\ B \in \mathcal{L}(H)$ operadores positivos tales que $AB = BA$, entonces AB es positivo.

3. Sean H un espacio de Hilbert, $A,\ S_1,\ S_2,\ T_1,\ T_2 \in \mathcal{L}(H)$ tales que $0 \leq S_1 \leq T_1$ y $0 \leq S_2 \leq T_2$, entonces
$$\|S_1^{1/2} A\| \leq \|T_1^{1/2} A\|$$
$$\|S_1^{1/2} A S_2^{1/2}\| \leq \|T_1^{1/2} A T_2^{1/2}\|$$

4. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo, entonces
$$\|Ax\|^2 \leq \|A\| \langle Ax, x \rangle$$

5. Sea H un espacio de Hilbert separable con base $\{e_n\}_n$, sea $K \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto positivo con descomposición espectral $Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle\, e_n$, entonces el operador $K^{1/2}$ es compacto y su descomposición espectral es $K^{1/2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \langle x, e_n \rangle\, e_n$.

6. Sean H un espacio de Hilbert, $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tales que $0 \leq A \leq B$. Si B es compacto, entonces A es compacto.

7. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $I \leq A$, entonces $A^{1/2}$ es acotado inferiormente.

8. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$. Probar que
$$A \geq 0 \Longleftrightarrow \exists B \in \mathcal{L}(H) /\ A = B^* B$$

   Nombre: Si $A \in \mathcal{L}(H)$, $|A| = (A^* A)^{1/2}$

9. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$.
   (a) $\|Tx\| = \|\ |T| x\|$
   (b) $R(T)$ es cerrado si y sólo si $R(|T|)$ es cerrado.

10. **Descomposición Polar:** Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces existe una única isometría parcial $U \in \mathcal{L}(H)$ tal que $T = U\,|T|$ y $\ker U = \ker T$.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ con descomposición polar $T = U\,|T|$. Entonces:

    (a) $|T| = U^* T$

    (b) Si T es inversible, U es un operador unitario.

    (c) Si $S : \ell^2 \to \ell^2$ es el shift a derecha y $S = U\,|S|$ es su descomposición polar, entonces U no es unitario.

12. (a) Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Probar que existen únicos operadores positivos A^+ y A^- en $\mathcal{L}(H)$ tales que $A = A^+ - A^-$ y $A^+A^- = A^-A^+ = 0$. Además $\|A\| = \max\{\|A^+\|, \|A^-\|\}$.

    (Sug: Considerar las funciones $f^+(t) = \max\{t, 0\} = \frac{1}{2}(|t| + t)$ y $f^-(t) = \max\{-t, 0\} = \frac{1}{2}(|t| - t)$, para la unicidad recordar que $|t|$ se aproxima uniformemente sobre compactos de $I\!R$ por polinomios reales sin término independiente)

    (b) Si $\varphi \in L^\infty[0,1]$ a valores reales, y $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ es el operador de multiplicación, hallar M_φ^+ y M_φ^-

13. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:

    (a) $A = \Re(A) + i\Im(A)$, donde $\Re(A) = \frac{A+A^*}{2}$, $\Im(A) = \frac{A-A^*}{2i}$ son operadores autoadjuntos.

    (b) A es combinación lineal de a lo sumo 4 operadores unitarios.

    (Sug: Si $A^* = A$, $\|A\| \leq 1$, usar $f(t) = t + i\sqrt{1-t^2} \in C(\sigma(A))$ y que $t = \frac{f(t)+\overline{f(t)}}{2}$)

14. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo. $0 \notin \sigma(A)$ si y sólo si existe $B \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto tal que $A = e^B$.

15. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, tal que $0 \leq A \leq I$. Entonces $\{A^{1/n}\}_n$ es una sucesión creciente en $\mathcal{L}(H)$ y $\forall n,\ 0 \leq A^{1/n} \leq I$.

16. Sea H un espacio de Hilbert, sea $\varphi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ lineal tal que $\varphi(I) = I$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ y $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$. Entonces:

    (a) $\forall A \in \mathcal{L}(H),\ \ \sigma(\varphi(A)) \subset \sigma(A)$ y $\|\varphi(A)\| \leq \|A\|$

    (b) Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto y $f \in C(\sigma(A))$ entonces $\varphi(f(A)) = f(\varphi(A))$

    (c) Si φ es inyectiva y $A \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto entonces $\sigma(\varphi(A)) = \sigma(A)$.

    (Sug: Si no coinciden los espectros, debe existir $f \in C(\sigma(A))$ no nula, tal que $f|_{\sigma(\varphi(A))} \equiv 0$)

    (d) Si φ es inyectiva y $A \in \mathcal{L}(H)$ entonces $\|\varphi(A)\| = \|A\|$.