Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2004

Práctica 1

Espacios de Banach

1. (a) Si $1 \leq p \leq \infty$, $s_f = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \quad \text{p.c.t. } n\}$, entonces s_f es un subespacio de ℓ^p no cerrado (más aún, es denso).

   (b) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio, entonces $\overline{S}$ es un subespacio.

   (c) Sean E un espacio de Banach, S un subespacio cerrado de E, entonces S, con la norma inducida por E, es un espacio de Banach.

2. (a) Sea K un espacio topológico compacto, entonces $C(K) = \{f : K \to \mathbb{C}$ continuas$\}$ con la norma
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$$
es un espacio de Banach.

   (b) Si K es un compacto de $\mathbb{C}^n$, $C(K)$ es separable.

3. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado. Son equivalentes:

   (a) E es Banach

   (b) $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es completo

   (c) $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ es completo

4. Si E es un espacio vectorial normado de dimensión finita, demostrar que $B(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es compacta.

   Definición: Sean E un espacio vectorial, $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ dos normas definidas sobre E. Decimos que las normas son equivalentes si y sólo si $\exists a, b > 0 / \|x\| \leq a\|x\|' \leq b\|x\| \ \ \forall x \in E$.

5. (a) Dos normas definidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si cada sucesión que converge con una, converge con la otra.

   (b) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.

   (c) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier norma que se defina sobre E hace de E un espacio de Banach.

   (d) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces S es cerrado.

6. Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\forall x \notin F \ \exists y_0 \in F$ que realiza la distancia, o sea
$$\|x - y_0\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$
Sugerencia. Ver que $y_0 \in S = \{y \in F : \|y\| \leq 2\|x\|\}$.

7. *Lema de Riesz:* Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio cerrado propio ($F \neq E$), $0 < a < 1$, entonces $\exists x_a \in E$, $\|x_a\| = 1$ tal que $d(x_a, F) \geq a$. (Sug: Sea $x \in E - F$, $d = d(x, F) > 0$, tomar $y_0 \in F$ tal que $0 < d(x, y_0) < \frac{d}{a}$ y probar que $x_a = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$ es el que sirve).

8. Sea E un espacio vectorial normado, $B(0,1)$ es compacta si y sólo si $\dim E < \infty$.

9. (a) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio. S tiene interior no vacío si y sólo si $S = E$.
   (b) Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces $\dim E > \aleph_0$.

10. Demostrar que un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.

11. Sea E un espacio vectorial normado, E es de Banach si y sólo si $\forall (x_n)_n \subset E$ vale que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

12. Sean E y F espacios vectoriales normados. En $E \times F$, definimos $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$.
   (a) $(E \times F, \| \ \|)$ es un espacio vectorial normado.
   (b) Si E y F son espacios de Banach, $E \times F$ resulta un espacio de Banach.
   (c) La inyección $J_E : E \to E \times F$ dada por $J_E(x) = (x, 0)$ y la proyección $P_E : E \times F \to E$ dada por $P_E(x,y) = x$ son ambas continuas. Lo mismo vale para J_F y P_F.

13. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado.
   (a) Probar que E/S es un espacio vectorial.
   (b) Si definimos en E/S la norma $\|[x]\| = \|x + S\| = d(x,S)$, probar que está bien definida y que es, efectivamente, una norma.
   (c) Si $\Pi : E \to E/S$ es la proyección al cociente $\Pi(x) = [x]$, ver que Π es lineal, que $\|\Pi\| \leq 1$ y que Π es abierta.
   (d) Probar que E/S es un espacio de Banach.

14. Sean E un espacio de Banach, $S, T \subset E$ subespacios cerrados con $\dim T < \infty$ entonces $S + T$ es cerrado.

15. Probar que los siguientes espacios son Banach con las normas indicadas. Por Ω entendemos un dominio compacto en $\mathbb{R}^N$.
   (a) $C^1(\Omega)$ $\qquad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty$.
   (b) $C^r(\Omega)$ $\qquad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty + \cdots + \sum \|f_{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}}\|_\infty$.
   (c) $Lip(\Omega)$ $\qquad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$.
   (d) C^α $\qquad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $\qquad 0 < \alpha < 1$. ¿Qué sucede si $\alpha > 1$?
   (e) El Espacio de las Funciones de Variación Acotada.

$$BV([0,1]) = \{f \in C([0,1]) / \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < +\infty\}$$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$$