

# Análisis Funcional - 1º cuatrimestre 2004

## PRÁCTICA 2

### FUNCIONALES LINEALES - TEOREMA DE HAHN-BANACH

1. Si  $E$  un espacio vectorial,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  lineal,  $\varphi \neq 0$ , entonces  $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{C}$ .
2. (a) Sean  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  (o  $\mathbb{R}$ , según sea el cuerpo de escalares de  $E$ ) una forma lineal. Son equivalentes:
  - i.  $\varphi$  es continua
  - ii.  $\varphi$  es continua en 0
  - iii.  $\varphi$  es acotada (i.e.  $\sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty$ )(b)  $\varphi$  es continua si y sólo si  $\ker \varphi$  es cerrado.
3. Sean  $E$  un espacio vectorial normado sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  lineal.
  - (a) Si  $\varphi$  es no acotada entonces toma todos los valores reales en cualquier entorno de 0.
  - (b)  $\varphi$  es continua si y sólo si  $\forall c \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x : \varphi(x) < c\}$  y  $\{x : \varphi(x) > c\}$  son abiertos.
  - (c) Si  $A \subset E$  tiene interior no vacío y  $\exists a \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(x) \geq a \forall x \in A$ , entonces  $\varphi$  es continua.- 4. Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  lineal tales que para toda sucesión  $(x_n)_n \subset E$  convergente a 0, resulta  $(\varphi(x_n))_n$  acotada. Demostrar que  $\varphi$  es continua.
- 5. Sea  $E^* = \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{C} / \varphi \text{ es lineal y continua}\}$ .

a) Entonces

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

es una norma sobre  $E^*$ , que hace de  $E^*$  un espacio de Banach.

b) Prabar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{E^*} &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| < 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}\end{aligned}$$

$$\text{y } |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|.$$

6. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas.

- (a)  $\varphi : c \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- (b)  $\varphi : L^2[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt$
- (c)  $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt$
- (d)  $\varphi : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = x_1 + x_2$
- (e)  $\varphi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = x_1 + x_2$
- (f)  $\varphi : \ell^1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$

$$(g) \varphi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$$

$$(h) \varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$$

7. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $\varphi \in E^*$ ,  $\varphi \neq 0$ ,  $y \in E$ ,  $y \notin \ker \varphi$ . Probar que:

(a)  $E = \ker \varphi \oplus \langle y \rangle$ , donde  $\langle y \rangle$  significa el subespacio generado por  $y$ .

$$(b) d(y, \ker \varphi) = \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|}$$

(c) Si  $H = \{x \in E : \varphi(x) = c\}$  entonces  $d(0, H) = \frac{|c|}{\|\varphi\|}$ .

8. (a) Demostrar que en un espacio vectorial normado de dimensión finita toda funcional lineal es continua.

(b) Sea  $L_0(\mathbb{R})$  el espacio de las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas tales que  $\exists [a, b] \subset \mathbb{R}$  con  $f(t) = 0 \forall t \notin [a, b]$ . Demostrar que  $(L_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$  es un espacio vectorial normado. Además, si definimos  $\varphi : L_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(f) = \int f(t) dt$  probar que  $\varphi$  resulta una funcional lineal no acotada.

9. Sea en  $c_0$  la familia  $\{e^n\}_{n \geq 1}$  de sucesiones definidas por  $e_i^n = \delta_{ni}$  y sea  $x^0$  la sucesión dada por  $x_i^0 = \frac{1}{i}$

(a) Verificar que  $A = \{x^0, e^1, e^2, \dots, e^n, \dots\}$  es un conjunto l.i. de  $c_0$

(b) Sea  $B$  una base algebraica de  $c_0$  que contenga a  $A$ ;  $S = A \cup \{b^j\}_{j \in J}$  con  $b^j \notin A$  para todo  $j$

Luego todo  $x \in c_0$  se escribe de manera única como

$$x = \alpha_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^n + \sum_{i \in J} \alpha_i b^i$$

donde los coeficientes son nulos salvo finitos.

Si  $f : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  se define por  $f(x) = \alpha_0$ , probar que  $f$  es una funcional lineal no continua.

10. Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $\varphi, \psi \in E^*$  tales que  $\varphi \cdot \psi \equiv 0$ , entonces  $\varphi \equiv 0$  ó  $\psi \equiv 0$ .

11. (a) Sea  $y \in \ell^1$ . Si definimos  $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

resulta  $\varphi \in c_0^*$  con  $\|\varphi\|_{c_0^*} = \|y\|_1$ .

(b) Recíprocamente, dada  $\varphi \in c_0^*$ , mostrar que la sucesión dada por  $y_n = \varphi(e_n)$ , donde  $e_n = (\delta_k^n)_{k \geq 1}$  pertenece a  $\ell^1$ .

(c) Probar que las aplicaciones definidas en (i) y (ii) son una la inversa de la otra, y deducir que  $c_0^* \cong \ell^1$  (isomorfismo isométrico).

- (d) De manera análoga, probar que  $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$  y que  $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ , si  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
12. (a) Sea  $I$  un conjunto de índices cualquiera, probar que  $\ell^2(I)^* \cong \ell^2(I)$ .  
 (b) Si  $E$  y  $F$  son espacios vectoriales normados isométricamente isomorfos entonces sus duales también lo son.
13. Sea  $E$  un espacio de Banach y  $S \subset E$  un subespacio cerrado.  
 (a) Si  $S$  tiene dimensión finita, probar que  $S$  es complementado.  
 (b) idem (a) si  $S$  tiene codimensión finita.
14. (a) Sea  $E$  un espacio vectorial normado, entonces  $\forall x \in E$
- $$\|x\| = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*, \|\varphi\| = 1\}$$
- (b) Sea  $E$  un espacio vectorial normado, sean  $x, y \in E$  tales que  $\varphi(x) = \varphi(y) \forall \varphi \in E^*$ , entonces  $x = y$ .
15. Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $F \subset E$  un subespacio,  $x \in E$  tales que  $d = d(x, F) > 0$  entonces  $\exists \varphi \in E^*$ ,  $\|\varphi\| = 1$ ,  $\varphi(x) = d$ ,  $\varphi(y) = 0 \forall y \in F$ .  
 (Sug: Sea  $H = \langle F, x \rangle$ , definir  $\psi : H \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\psi(\lambda x + y) = \lambda d$ ,  $\forall y \in F \forall \lambda \in \mathbb{C}$ )
16. Sea  $E$  un espacio vectorial normado,  $(x_n)_n \subset E$ . Un punto  $y_0$  es límite de combinaciones lineales  $\sum_{j=1}^N c_j x_j$  si y sólo si  $\forall \varphi \in E^*$  que verifique que  $\varphi(x_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , vale que  $\varphi(y_0) = 0$ .
17. Sea  $E$  un espacio de Banach y sea  $S \subset E$  un subespacio cerrado. Sea  $x_0$  tal que
- $$\inf_{y \in S} \|x_0 - y\| = d > 0$$
- Probar que existe un funcional  $\phi \in E^*$  tal que
- $$\phi(x_0) = 1, \quad \|\phi\| = 1/d, \quad \phi|_S \equiv 0.$$
18. Sea  $S$  un subespacio de  $E$  un espacio de Banach. Si  $S$  no es denso en  $E$  entonces existe  $\phi \in E^*$ ,  $\phi \neq 0$  tal que  $\phi|_S \equiv 0$ .
19. Sean  $E$  y  $F$  espacios vectoriales normados, probar que existe un isomorfismo entre  $(E \times F)^*$  y  $E^* \times F^*$ .
20. Sea  $E$  un espacio vectorial. Sean  $B$  y  $B'$  dos bases de Hamel (bases algebraicas) de  $E$ . Probar que el cardinal de  $B$  es igual al cardinal de  $B'$  (ese cardinal se denomina dimensión del espacio).
21. Dos espacios vectoriales son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.
22. Probar que la dimensión de  $l^\infty$  es  $c$ .
23. Sea  $E$  un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que existe una sucesión infinita estrictamente decreciente de subespacios cerrados infinito dimensionales.

24. Sea  $E$  un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que el espacio  $\ell^\infty$  es isomorfo a un subespacio lineal de  $E$ .
25. Probar que la dimensión de un Banach de dimensión infinita es mayor o igual que  $\mathfrak{c}$ .
26. Sea  $E$  un Banach y  $S$  un subespacio de  $E$ , probar que

$$\overline{S} = \bigcap \{ \ker(\phi) / \phi \in E^* \mid S \subset \ker(\phi) \}.$$