Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2004

Práctica 4

Operadores acotados: operador adjunto. Operadores No Acotados

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la matriz asociada al operador $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $Tx = Ax$. Probar que T' tiene como matriz asociada a A^t.

2. (a) Si $1 \le p < \infty$, S y T son los shifts definidos en el ejercicio 4 de la práctica anterior, calcular S' y T'.

   (b) Si $J : \ell^2 \to c_0$, $J(x) = x$, probar que $J \in \mathcal{L}(\ell^2, c_0)$ y calcular J'.

3. Sean $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ dos conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Se definen los operadores

$$\rho : L^p(\tilde{\Omega}) \to L^p(\Omega), \qquad e : L^p(\Omega) \to L^p(\tilde{\Omega}),$$

   dados por $\rho(u) = u\,|_\Omega$ y $e(u)(t) = u(t)$ si $t \in \Omega$ y 0 en otro caso. Probar que ρ y e son acotados, calcular sus normas y calcular ρ', e'.

4. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de multiplicación $M_\varphi(f) = \varphi f$. Calcular M'_φ.

5. Sea $V : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$ el operador de Volterra $Vu(x) = \int_0^x u(t)dt$. Probar que $V \in \mathcal{L}(L^1([0,1]))$ y calcular V'.

6. Sea E un espacio vectorial normado, sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ entonces $(AB)' = B'A'$.

7. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E,F)$.

   (a) $\|A\| = \|A'\|$

   (b) Si A es inversible entonces A' es inversible y $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

   (c) La aplicación $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F', E')$ dada por $\Phi(A) = A'$ es una isometría.

8. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Probar que:

   (a) $R(A)^\perp = \ker(A')$ (b) ${}^\perp R(A') = \ker(A)$

   (c) $\overline{R(A)} = {}^\perp\ker(A')$ (d) $R(A') \subseteq (\ker(A))^\perp$

9. Sean E un espacio de Banach, $F \subset E$ subespacio y $\Phi : E' \to F'$ dada por $\Phi(\varphi) = \varphi|_F$.

   (a) Probar que $\Phi \in \mathcal{L}(E', F')$, Φ es suryectiva y calcular $\ker(\Phi)$.

   (b) Probar que si definimos $i : F \to E$ como $i(x) = x$, entonces $i' = \Phi$.

   (c) Si F es reflexivo, calcular Φ'.

10. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con $R(T)$ cerrado, entonces $R(T')$ es cerrado y

$$R(T') = (\ker(T))^\perp$$

11. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Entonces se dan los siguientes isomorfismos isométricos:

$$(E/S)' \cong S^{\perp}, \qquad E'/S^{\perp} \cong S'$$

12. Si $D(A) = \{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2 < \infty\}$ y $A : D(A) \subset \ell^2 \to \ell^2$ es el operador definido por $Ax = (nx_n)_{n \geq 1}$.

    (a) Probar que $D(A)$ es denso en ℓ^2.

    (b) Probar que A es lineal y no acotado.

    (c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

13. Si $D(A) = \{x \in \ell^2 : x \in \ell^1\}$ y $A : D(A) \subset \ell^2 \to \ell^1$ es el operador definido por $Ax = x$

    (a) Probar que $D(A)$ es denso en ℓ^2.

    (b) Probar que A es lineal y no acotado.

    (c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

14. Si $D(A) = \{f \in L^2[0,1] : \int_0^1 |f(t^2)|^2 \, dt < \infty\}$ y $A : D(A) \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ es el operador definido por $(Af)(t) = f(t^2)$

    (a) Probar que $D(A)$ es denso en $L^2[0,1]$.

    (b) Probar que A es lineal y no acotado.

    (c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

15. Si $D(A) = \{f \in L^2[0,1] : f \in C[0,1]\}$ y $A : D(A) \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ es el operador definido por $(Af)(t) = t\,f(0)$

    (a) Probar que $D(A)$ es denso en $L^2[0,1]$.

    (b) Probar que A es lineal y no acotado.

    (c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

Definición: *Si E y F son espacios de Banach, un operador $A : D(A) \subset E \to F$ se dice* **cerrado** *si $G(A)$ es cerrado en $E \times F$.*

16. Si $D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : t\,f(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$ y $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ es el operador definido por $(Af)(t) = t\,f(t)$

    (a) Probar que $D(A)$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

    (b) Probar que A es lineal y no acotado.

    (c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

    (d) Probar que A es cerrado.

17. Sean E y F espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$ un operador cerrado e inversible, entonces $A^{-1} : R(A) \subset F \to E$ es un operador cerrado.

18. Sean E y F espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$ un operador cerrado e inversible tal que $R(A) = F$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$

19. Sean E y F espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$ un operador cerrado, entonces $\ker(A)$ es cerrado.

20. Sean E y F espacios de Banach, un operador $A : D(A) \subset E \to F$ es cerrado si y sólo si $D(A)$ con la norma $\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Ax\|_F$ es un espacio de Banach.

    Definición: *Un operador $A : D(A) \subset E \to F$ se dice* **clausurable** *si existe una extensión cerrada de A, $\widehat{A}$, o sea si existe $\widehat{A} : D(\widehat{A}) \subset E \to F$ un operador cerrado con $D(A) \subset D(\widehat{A})$ y $\widehat{A}|_{D(A)} = A$.*

21. Sean E y F espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$, $\widehat{A} : D(\widehat{A}) \subset E \to F$ operadores.

    (a) $\widehat{A}$ es una extensión de A si y sólo si $G(A) \subseteq G(\widehat{A})$.

    (b) Son equivalentes:

    i. A es clausurable.

    ii. $\overline{G(A)}$ no contiene puntos de la forma $(0, y)$ con $y \neq 0$ (i.e. $\overline{G(A)}$ es el gráfico de un operador).

    iii. Si $(x_n)_n \subset D(A)$ tal que $x_n \to 0$ y $Ax_n \to y$ entonces $y = 0$.

    (c) Si A es clausurable, de todas las extensiones cerradas de A existe una mínima.

22. Si $D(A) = C^1([0, 1])$ y $A : D(A) \subset L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ está dado por $Ax = x'$, probar que A es clausurable.

23. Si E y F son espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$ es un operador lineal, cerrado con dominio denso, entonces

$$\ker(A) = {}^{\perp}R(A^*), \qquad \ker(A^*) = R(A)^{\perp}$$