Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2004
Práctica 5
Topologías débiles

1. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente y $\varphi_n \to \varphi$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.
2. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$. Si $x_n \to x$ entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente.
3. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$. Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente, entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_n\}$ que tiende fuertemente a x.
4. Sean E un espacio de Banach, $x_n \in E$. $\{x_n\}_n$ converge en E si y sólo si $\{x_n\}_n$ converge débil y uniformemente en $\{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$.
5. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, sea $S = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. Probar que en $(E, \sigma(E, E'))$, S tiene interior vacío.
6. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$, tales que $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ débil *. Probar que $\|\varphi_n\|$ está acotada y que $\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\|$.
7. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ y $x_n \to x$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.
8. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$.

   (a) $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow \varphi_n \rightharpoonup \varphi$ débilmente $\Rightarrow \varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ débil *.

   (b) Si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.
9. Definamos $\varphi_n : E \to \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$.

   (a) Si $E = \ell^2$ probar que $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ débil *. ¿Es cierto que $\varphi_n \to 0$ fuertemente?

   (b) Si $E = \ell^\infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E'}, \forall n \in \mathbb{N}$ pero que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión débil * convergente. ¿Contradice esto el hecho de que $(B_{E'}, \sigma(E', E))$ es compacta?
10. Sean $\varphi_n : C([-1,1]) \to \mathbb{C}$ definidas por
$$\varphi_n(f) = f\left(-\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$$
Probar que $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ pero $\varphi_n \not\rightharpoonup 0$.
11. Si $1 \leq p < \infty$, en ℓ^p, sea e^n dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$. Probar que:

    (a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \rightharpoonup 0$, $e^n \not\to 0$

    (b) Si $p = 1$, $e^n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, $e^n \not\rightharpoonup 0$, $e^n \not\to 0$
12. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces
$$x^n \rightharpoonup x \iff \sup \|x^n\|_p < \infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \ \ \forall k$$

13. (a) Si $1 < p < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^p[0,1]$. Entonces

$$\varphi_n \rightharpoonup \varphi \Longleftrightarrow \sup \|\varphi_n\|_p < \infty \ \wedge \ \int_0^a \varphi_n(t)\,dt \to \int_0^a \varphi(t)\,dt \ \ \forall a \in [0,1]$$

(b) Si $\varphi_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2[0,1]$, probar que $\varphi_n \rightharpoonup 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

14. Sean $\varphi_n, \varphi \in L^\infty[0,1]$, $M_{\varphi_n}, M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ los operadores de multiplicación. Probar que

$$\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi \Longleftrightarrow M_{\varphi_n}(f) \rightharpoonup M_\varphi(f) \ \ \forall f \in L^2[0,1]$$

15. $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\| \ \|_\infty$ pero no en la topología débil * $\sigma(E', E)$.

16. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$

(a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in c_0'$ y calcular su norma.

(b) Probar que $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ y que $\varphi_n \not\rightharpoonup 0$.

(c) $c_0 \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1\}\rangle \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1, \varphi_2\}\rangle \supset \ldots \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}\rangle \supset \ \ldots$, y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿Ocurre lo mismo con ${}^\perp\langle\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty\rangle$?

17. Sean E un espacio de Banach, $J : E \to E''$ la inclusión canónica.

(a) $J(B_E)$ es fuertemente cerrado, donde B_E es la bola unidad cerrada de E.

(b) Dar un ejemplo en el que J no sea suryectiva.

18. Sean E y F espacios de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Si para cada $x \in E$ y para cada $\varphi \in F'$ la sucesión $\{\varphi(A_n x)\}$ está acotada, entonces $\{\|A_n\|\}$ está acotada.

19. Sean E un espacio de Banach reflexivo, $\varphi \in E'$.

(a) Probar que existe $x \in E, x \neq 0$ tal que $\varphi(x) = \|\varphi\| \, \|x\|$

(b) Si M es un subespacio cerrado propio de E', existe $x \in {}^\perp M$, $\|x\| = 1$ tal que $\varphi(x) = d(\varphi, M)$

20. Si E es un espacio de Banach separable y $\{\varphi_n\}$ es una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_k$ débil * convergente.

(Sug: Si $\{x_k\}$ es denso en E, $\{\varphi_n(x_1)\}_n$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_1}(x_1)\}_{n_1}$, también, $\{\varphi_{n_1}(x_2)\}_{n_1}$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_2}$, seguir inductivamente y ver que $\{\varphi_{n_n}\}_n$ es débil * convergente)

21. Sea E un espacio de Banach reflexivo.

(a) Si $\{x_n\}_n$ está acotada en E, entonces tiene una subsucesión débil convergente. (Sug: tomar S el subespacio cerrado generado por $\{x_n\}_n$, ver que S' es separable, usar ejercicio anterior e inclusión canónica en el bidual)

(b) Si $\{\varphi_n\}_n$ está acotada en E', entonces tiene una subsucesión débil * convergente.

22. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo, existe $\{\varphi_n\} \in E'$, $\|\varphi_n\| = 1$ tal que $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$.