Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2004

Práctica 6

Espacios de Hilbert

1. Probar que son espacios de Hilbert:

   (a) $\mathbb{C}^n$, con producto escalar $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$

   (b) ℓ^2, con producto escalar $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$

   (c) $L^2(X)$, donde $(X, \sum, \mu)$ es un espacio de medida, con producto escalar

   $$\langle f, g\rangle = \int_X f\, \overline{g}\, d\mu$$

   (d) $H^1(\Omega)$ (donde las funciones son a valores reales), con el producto escalar

   $$\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg + \int_\Omega \nabla f \nabla g$$

2. Si H es un espacio vectorial y $a : H \times H \to \mathbb{C}$ es sesquilineal y hermitiana, vale la fórmula de polarización, $\forall x, y \in H$:

   $$a(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{a(x+y, x+y) - a(x-y, x-y) + i\Big[a(x+iy, x+iy) - a(x-iy, x-iy)\Big]\Big\}$$

   En particular, en H Hilbert, $\forall x, y \in H$:

   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big)\Big\}$$

3. (a) Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Probar que existe un producto escalar que induce la norma de E (y que hace de E un espacio de Hilbert) si y sólo si $\|\ \|$ verifica la identidad del paralelogramo:

   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall x, y \in E$$

   (b) $(\ell^p, \|\ \|_p)$, si $p \neq 2$ y $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ no son espacios de Hilbert.

4. Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{e_n\}_n$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

   (a) $\{e_n\}_n$ es ortonormal maximal.

   (b) Si $x \in H$, $x \perp e_n \quad \forall n$, entonces $x = 0$.

5. Ortogonalización de Gram-Schmidt: Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $\{b_n\}_n$ es un subconjunto linealmente independiente de H que genera un subespacio denso en H.

(a) Definamos $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ y, una vez definido e_n,

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle b_{n+1}, e_k\rangle \, e_k}{\|b_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle b_{n+1}, e_k\rangle \, e_k\|}$$

Probar que $\{e_n\}_n$ es una base de H.

(b) Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, con $\lambda_n \neq 0$, tales que $f_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, b_i$ entonces $f_n = \alpha_n \, e_n$, con $\alpha_n \in\mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1$ para todo n.

6. Desigualdad de Bessel: Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ un conjunto ortonormal. Probar que

   (a) $\forall x \in H$ y para cada $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

   (b) $\forall x \in H$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$ converge y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

7. Sea H un espacio de Hilbert, si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de H entonces $\forall x \in H$ vale:

   (a) $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \, e_n$

   (b) $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$

   (c) Si $y \in H$, $\quad \langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \, \overline{\langle y, e_n\rangle}$

8. (a) Probar que $\{e^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$ dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$ es una base de ℓ^2.

   (b) Probar que $\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \}$ es una base de $L^2[-\pi, \pi]$.

   (c) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $L^2[-1, 1]$ considerado como $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

9. (a) El conjunto $\{1, x, x^2, \ldots\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2[-1, 1]$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que

$$e_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

   donde $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \, (\frac{d}{dx})^n (x^2 - 1)^n$ son los polinomios de Legendre.

(b) El conjunto $\{x^n e^{-x^2/2} : n \geq 0\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2(-\infty, \infty)$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}}\, H_n(x)\, e^{-x^2/2}$$

donde $H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ son los polinomios de Hermite y $H_n' = 2n\, H_{n-1}$.

10. Sean H y K espacios de Hilbert. En $H \times K$ definimos

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle k_1, k_2 \rangle_K$$

Probar que $(H \times K, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert, y que $H \times \{0\}$ y $\{0\} \times K$ son cerrados y ortogonales en $H \times K$.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $S \subset H$ un subespacio cerrado propio.
    (a) Probar que existe $x \in H - S$ tal que $x \perp S$.
    (b) Si $S^\perp = \{x \in H : x \perp S\}$ entonces $S^\perp$ es un subespacio cerrado y $S \oplus S^\perp = H$.
    (c) $(S^\perp)^\perp = S$
    (d) Dar contraejemplos de (b) y (c) si S no es cerrado.

12. (a) Sean H un espacio de Hilbert, $D \subset H$ un subconjunto. El subespacio generado por D es denso en H si y sólo si se verifica

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in D \Rightarrow x = 0$$

    (b) En ℓ^2 sea $S = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$. Probar que S es denso en ℓ^2.

13. Sean S y T subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert H. Probar que $S \oplus T$ es cerrado.

14. Sean H un espacio de Hilbert, $x_n, x \in H$.
    (a) $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$
    (b) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $e_n \rightharpoonup 0$
    (c) Si $x_n \rightharpoonup x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $x_n \to x$
    (d) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m \rangle \to \langle x, e_m \rangle \ \ \forall m \in \mathbb{N}$
    (e) Si $x_n \rightharpoonup x$, entonces existe una subsucesión x_{n_k} tal que su media aritmética $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \cdots + x_{n_k})$ verifica que $z_k \to x$.

15. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H, son equivalentes:
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge débilmente.
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

16. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert H y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortogonal en H que verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1,$$

entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también completo.

Familias sumables. Sean E un espacio de Banach, $(x_i)_{i\in I}$ una familia en E.

Definición: $\sum_{i\in I} x_i$ es de Cauchy si y sólo si $\forall\varepsilon > 0\ \exists F \subset I$, F finito, tal que si G_1 y G_2 son subconjuntos finitos de I que contienen a F entonces

$$\Big\| \sum_{i\in G_1} x_i - \sum_{i\in G_2} x_i \Big\| < \varepsilon.$$

17. Probar que la siguiente definición es equivalente a la anterior: $\forall\varepsilon > 0\ \exists F \subset I$, F finito, tal que si $F \subset G \subset I$, G finito, entonces

$$\Big\| \sum_{i\in G-F} x_i \Big\| < \varepsilon$$

Definición: $\sum_{i\in I} x_i = x \quad (x \in E)$ si y sólo si $\forall\varepsilon > 0\ \exists F \subset I$, F finito, tal que si $F \subset G \subset I$, G finito, entonces

$$\Big\| \sum_{i\in G} x_i - x \Big\| < \varepsilon$$

En este caso se dice que la familia es sumable.

18. En un espacio de Banach E, $\sum_{i\in I} x_i$ es de Cauchy si y sólo si $(x_i)_{i\in I}$ es sumable.

19. Si $x = \sum_{i\in I} x_i$, $y = \sum_{i\in I} y_i$, $\lambda \in\mathbb{C}$, entonces

$$x + y = \sum_{i\in I}(x_i + y_i) \qquad \wedge \qquad \lambda x = \sum_{i\in I}(\lambda x_i)$$

20. Si $x = \sum_{i\in I} x_i$, $y \in H$, con H Hilbert, entonces

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, y\rangle$$

21. Si $\sum_{i\in I} x_i$ es de Cauchy entonces $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ es a lo sumo numerable.

22. $\ell^2(I) = \{(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{C} : \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty\}$, con $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} x_i\, \overline{y}_i$, es un espacio de Hilbert. (enunciar y probar Hölder para que el producto escalar esté bien definido)

23. Pitágoras: Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia ortogonal en un espacio de Hilbert H. $(x_i)_{i\in I}$ es sumable si y sólo si $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ es sumable y en tal caso

$$\Big\| \sum_{i\in I} x_i \Big\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2$$

24. Desigualdad de Bessel: Sea H un espacio de Hilbert.Si $(x_i)_{i\in I}$ es una familia ortonormal en H y $x \in H$ entonces $(|\langle x, x_i\rangle|^2)_{i\in I}$ es una familia sumable y

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

25. Demostrar que todo espacio de Hilbert H admite una base y que dos bases cualesquiera son coordinables.

26. (a) Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si todo sistema ortonormal es a lo sumo numerable.
    (b) Si $\#(I) > \aleph_0$, $\ell^2(I)$ no es separable.

27. Sea H un espacio de Hilbert.
    (a) Si $(x_i)_{i\in I}$ es una base de H, entonces $\forall x \in H$

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle\, x_i \quad \wedge \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2$$

    (b) Si $(x_i)_{i\in I}$ es una base de H, entonces H es isométricamente isomorfo a $\ell^2(I)$.
    (c) Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$.