Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2004

Práctica 7

Operadores en Espacios de Hilbert

Parte 1: Operadores Acotados.

1. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces:

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|, \qquad \|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$$

2. Sean H un espacio de Hilbert, $T, S \in \mathcal{L}(H)$
   - (a) $(\alpha T + \beta S)' = \overline{\alpha} T' + \overline{\beta} S'$.
   - (b) $(ST)' = T'S'$.
   - (c) $\|T\| = \|T'T\|^{1/2}$.
3. Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se verifica:
   - (a) $\ker(T) = R(T')^{\perp}$
   - (b) $(\ker(T))^{\perp} = \overline{R(T')}$
   - (c) $\ker(T') = R(T)^{\perp}$
   - (d) $(\ker(T'))^{\perp} = \overline{R(T)}$
4. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n \in \mathcal{L}(H)$ tales que $\sup_n |\langle T_n x, y\rangle| < \infty \quad \forall x, y \in H$, entonces $\sup_n \|T_n\| < \infty$.
5. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:
   - (a) T es una isometría
   - (b) $T'T = I$
   - (c) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H$

Definiciones: *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, H Hilbert.*

(a) T es autoadjunto si $T' = T$

(b) T es normal si $T'T = TT'$

(c) T es unitario si es inversible y $T^{-1} = T'$

(d) T es positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

6. (a) Si $\varphi \in L^\infty[0,1]$, sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de multiplicación. Calcular M'_φ , probar que M_φ es normal y caracterizar $\{\varphi \in L^\infty[0,1] : M_\varphi$ es unitario $\}$.
   (b) Si $(\alpha_n)_n \in \ell^\infty$, sea $A : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $Ax = (\alpha_n x_n)_n$. Calcular A', probar que A es normal y caracterizar $\{(\alpha_n)_n \in \ell^\infty : A$ es unitario $\}$.

7. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:
   (a) T es unitario.
   (b) T' es unitario.
   (c) T es una isometría suryectiva.
   (d) T y T' son isometrías.

8. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Entonces:
   (a) $\|T^2\| = \|T\|^2$
   (b) $\ker(T) = \ker(T')$
   (c) $T^2 = T \implies T$ es autoadjunto.
   (d) $T^2 = 0 \implies T = 0$.

9. Si H es un espacio de Hilbert, sea $P \in \mathcal{L}(H)$ un operador no nulo tal que $P^2 = P$. Son equivalentes:
   (a) $P' = P$
   (b) P es normal
   (c) $\|P\| = 1$
   (d) $\ker(P) = R(P)^\perp$

10. Sean H un espacio de Hilbert, $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:
    (a) $T'T$ y TT' son positivos.
    (b) Si T es positivo, $S'TS$ es positivo.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que $R(T)$ es cerrado si y sólo si T es acotado inferiormente en $(\ker(T))^\perp$.

12. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$.
    (a) Si $\langle Tx, x\rangle = 0 \ \ \forall x \in H$ entonces $T = 0$.
    (b) Dar un contraejemplo de (a) si H es Hilbert real.
    (c) Si H es un Hilbert real y T es autoadjunto, entonces vale (a).
    (d) T es normal si y sólo si $\|Tx\| = \|T'x\|$.

13. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n, T \in \mathcal{L}(H)$ normales.
    (a) Si $T_n x \to Tx \ \ \forall x \in H$ entonces $T'_n x \to T'x \ \ \forall x \in H$.
    (b) Dar un contraejemplo si T_n no son normales.

14. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:
    (a) T es autoadjunto
    (b) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
    (c) $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
    (d) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in H$
    (e) $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle \quad \forall x \in H$

Definición: *Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se dice isometría parcial si $T|_{(\ker T)^\perp}$ es isometría.*

15. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. T es isometría parcial si y sólo si $T'T$ es proyector.

16. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ positivo. Entonces $\{x \in H : \langle Tx, x\rangle = 0\}$ es un subespacio de H.

17. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Si $x \in H$ es tal que $Tx \neq 0$ entonces $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n x \neq 0$.

PARTE 2: Operadores no Acotados.

Definiciones: *Sean H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \to H$ un operador lineal.*

i. *A se dice* **positivo** *si $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in D(A)$.*
ii. *A se dice* **maximal positivo** *si A es positivo y $R(I + A) = H$.*
iii. *A se dice* **simétrico** *si $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y \in D(A)$.*
iv. *A se dice* **autoadjunto** *si $A^* = A$ (o sea A es simétrico y $D(A) = D(A^*)$).*

18. Sean H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo. Probar que A es maximal positivo.

19. Si $D(A) = \{(u_n)_n \in \ell^2 / \sum_{n\geq 1} n^2 |u_n|^2 < +\infty\}$ y $A : D(A) \subset \ell^2 \to \ell^2$ es el operador definido por $(Au)_n = n u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Probar que A es maximal positivo.

20. Sea $A : D(A) \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ dado por
$$D(A) = C_c^2(0,1) = \{\varphi \in C^2(0,1)/ \ \mathrm{sop}(\varphi) \text{ es compacto } \subset (0,1)\}$$
con $Au = -u''$. Probar que:
    (a) A es simétrico.
    (b) $A \neq A^*$.
    (c) A es positivo.
    (d) $R(I + A) \neq L^2[0,1]$

21. Sea $A : D(A) \subset L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ con $D(A) = \{u \in C^1(a,b) \cap C[a,b]/ \ u(a) = u(b) = 0\}$, $Au = iu'$. Probar que A es un operador simétrico no autoadjunto.

22. Sean H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \to H$ un operador simétrico tal que $R(A) = H$. Entonces A es autoadjunto.

23. Sean H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \to H$ un operador simétrico tal que $R(A)$ es denso en H. Entonces existe A^{-1} y A^{-1} es simétrico.

24. Sean H un espacio de Hilbert, $A : D(A) \subset H \to H$ un operador simétrico y positivo, $v \in H$. Sea $F : D(A) \subset H \to \mathbb{R}$ dado por

$$F(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \Re(\langle u, v\rangle)$$

Si $u_0 \in D(A)$, son equivalentes:

(a) $Au_0 = v$

(b) F tiene un mínimo en u_0.

25. Sea $F : \{(u_n)_n \in \ell^2 / \sum_{n\geq 1} n^2|u_n|^2 < +\infty\} \subset \ell^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$F(u) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n|^2 - \Re(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n})$$

Probar que F tiene un único mínimo y hallarlo.

26. Sean H un espacio de Hilbert y $V : D(V) \subset H \to H$ una isometría. Entonces:

(a) $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in D(V)$

(b) Son equivalentes:

i. $D(V)$ es cerrado.
ii. $R(V)$ es cerrado.
iii. $G(V)$ es cerrado.
iv. $V \in \mathcal{L}(H)$.