Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2004

Práctica 9

Espacios de Sobolev

1. Sean $1 \leq p \leq \infty$, $I = (-1, 1)$, $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $H(x) = 1$ si $x > 0$ y $H(x) = 0$ si no.
   (a) Probar que $u \in W^{1,p}(I)$ y que $u' = H$.
   (b) Más aún, toda función continua en $\bar{I}$ con derivada continua a trozos en I pertenece a $W^{1,p}(I)$.
   (c) $H \notin W^{1,p}(I)$.
2. Probar que en cada clase de $L^p(\Omega)$ existe a lo sumo una función continua.
3. Probar que $W^{1,p}(I)$ es un espacio de Banach, cualquiera sea el intervalo I.
4. Sean $1 < p \leq \infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}((a,b))$, $u \in L^p((a,b))$ tales que $u_n \to u$ en $L^p((a,b))$ y $(u')_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^p((a,b))$. Probar que $u \in W^{1,p}((a,b))$ y que existe una subsucesión tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}((a,b))$.
5. Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $p > 1$, entonces
$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_a^b |u'|^p \, dt\right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$
6. (a) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1((a,b))$ $|f(x)| \leq C\|f\|_{H^1((a,b))}$
   (b) Usando el teorema de Arzelá-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1((a,b))$ es precompacto en $C([a,b])$, y por lo tanto en $L^2((a,b))$.
7. Si I es un intervalo acotado, probar que los polinomios son densos en $W^{1,p}(I)$ para $1 \leq p < \infty$.¿Qué pasa para $p = \infty$?
8. Probar que toda función lipschitziana en un intervalo (a,b) es derivable en casi todo punto de (a,b).
9. Probar que $C_c^\infty(I)$ es denso en $W^{1,p}(I)$ si y sólo si $I = \mathbb{R}$ (I es un intervalo de $\mathbb{R}$ no necesariamente acotado).
10. Derivación de un producto. Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $uv \in W^{1,p}(I)$ y $(uv)' = u'v + uv'$. Además vale la fórmula de integración por partes
$$\int_y^x u'v = uv\Big|_y^x - \int_y^x uv'.$$
11. Derivación de una composición. Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$, y sea $u \in W^{1,p}(I)$. Entonces $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ y $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$.
12. "Resolver" el problema:
$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ en } (0,1), \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

13. Resolver el problema de Dirichlet no homogéneo

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ en } (0,1), \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta \end{cases}$$

siendo (a) $f \in L^2((0,1))$, (b) $f \in C([0,1])$.

14. Demostrar la siguiente *desigualdad de Poincaré*: Existe una constante C tal que

$$\|u\|_{L^2((a,b))} \leq C\|u'\|_{L^2((a,b))}$$

para toda $u \in H^1((a,b))$ tal que $\int_a^b u = 0$.

15. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{en } (a,b) \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

con $f \in L^2([a,b])$.

(a) Mostrar que si $u \in C^2((a,b)) \cap C^1([a,b])$ es solución del problema de Neumann entonces se verifica verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_a^b u'\varphi'\,dx + \int_a^b u\varphi\,dx = \int_a^b f\varphi\,dx$$

para toda $\varphi \in C^1((a,b)) \cap C([a,b])$.

(b) Mostrar que para toda $f \in L^2((a,b))$ existe una única $u \in H^1((a,b))$ solución débil de este problema.

16. Sea $f \in L^2((a,b))$. Probar que el problema de Neumann

$$\begin{cases} -u'' = f \quad \text{en } (a,b) \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

tiene única solución $u \in H^1((a,b))$ con $\int_a^b u = 0$.

17. Hallar los autovalores y las autofunciones de $Au = -u''$ con las condiciones de contorno

(a) $u(0) = u(1) = 0$ (Dirichlet)

(b) $u'(0) = u'(1) = 0$ (Neumann)

(c) $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$ (periódicas)

Verificar en cada caso que la sucesión de autovalores λ_n tiende a infinito y la sucesión de autofunciones $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de $L^2((0,1))$.

18. Considerar el problema de Sturm-Liouville no simétrico

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \quad \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con $p \in C^1([0,1]), q \in C([0,1]), f \in L^2((0,1))$, y con $p(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0,1]$.

(a) Probar que si $q - \frac{1}{2}r' \geq 0$ en $[0,1]$ entonces existe única solución del problema en $H_0^1((0,1))$.

(b) Probar que si $q \geq 0$ entonces existe única solución del problema en $H_0^1((0,1))$. ¿Cuál es el problema de minimización asociado? *Sugerencia.* Si R es una primitiva de $\frac{r}{p}$ multiplicar la ecuación por $\xi = e^{-R}$ para trasformar el problema en uno simétrico.

19. Se define el $p-$*Laplaciano* como $\Delta_p u \equiv (|u'|^{p-2}u')'$ con $p > 1$ (cuando $p = 2$, $\Delta_p u = u''$). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f & \text{en } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

con $f \in L^{p'}((a,b))$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

(a) Probar que $u \in C_0^2((a,b))$ es solución del problema si y sólo si verifica la siguiente formulación débil

$$\int_a^b |u'|^{p-2}u'\varphi'\,dx + \int_a^b |u|^{p-2}u\varphi\,dx = \int_a^b f\varphi\,dx$$

para toda $\varphi \in C_0^1((a,b))$.

(b) Probar que si $u \in W_0^{1,p}((a,b))$ minimiza el siguiente funcional

$$\Psi : W_0^{1,p}((a,b)) \to \mathbb{R}$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{p}\int_a^b |u'|^p + |u|^p\,dx - \int_a^b fu\,dx$$

entonces es una solución débil del problema del $p-$Laplaciano.

(c) Probar que el problema del $p-$Laplaciano tiene una única solución débil en $W_0^{1,p}((a,b))$.

20. Probar, en cada caso, que $\phi \in H^1((-1,1))'$ y hallar $v \in H^1((-1,1))$ tal que $\phi(u) = \langle u, v\rangle$:

(a) $\phi(u) = \displaystyle\int_{-1}^1 u(x)\sin(x) + u'(x)\cos(x)\,dx$

(b) $\phi(u) = \displaystyle\int_{-1}^1 u(x)\cos(x) + u'(x)\sin(x)\,dx$