Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2005

Ejercicios Adicionales - práctica 6: operadores de Fredholm

1. Sean X,Y,Z espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tales que ST es Fredholm, entonces S es Fredholm si y sólo si T lo es.

2. Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ tales que ST es Fredholm. Si $\mathrm{dimN(S)} < \infty$, entonces S y T son Fredholm.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que existe $k \geq 1$ tal que $T^k - I \in \mathcal{K}(X)$. Entonces T es Fredholm.

4. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que existe $k \geq 1$ tal que $T^k \in \mathcal{K}(X)$. Entonces $I - T$ es Fredholm.

5. a) Sea $T \in \mathcal{L}(X)$, T Fredholm. Entonces existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $T = TST$

   b) Sean $S, T \in \mathcal{L}(X)$ tales que $T = TST$. Si S es de Fredholm, entonces S es de Fredholm. En particular S en a) es de Fredholm.

   a) Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ de Fredholm y S tal que $T = TST$. Entonces $\mathrm{ind(S)} = -\mathrm{indT}$.

6. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ de Fredholm y $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $T = TST$. Sea $U \in \mathcal{L}(X)$.

   a) Si $I + SU$ (respectivamente $I + US$) es de Fredholm, entonces $T + U$ es de Fredholm.

   b) En las condiciones de a)

   $$\mathrm{ind(T+U)} = \mathrm{ind(T)} + \mathrm{ind(I+SU)}$$

   (respctivamente $\mathrm{ind(T+U)} = \mathrm{ind(T)} + \mathrm{ind(I+US)}$)

7. Sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,X)$.

   a) Si S y T son de Weyl, entonces ST es de Weyl.

   b) Si ST es de Weyl, S es de Weyl si y sólo si T es de Weyl.

8. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$, T de Weyl. Sea S tal que $T = TST$. Entonces S es de Weyl.

9. Sean $T, U \in \mathcal{L}(X)$, T de Weyl. Sea $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $T = TST$.

   a) Si $I + SU$ (respectivamente $I + US$) es de Weyl, entonces $T + U$ es de Weyl.

   b) Si T es de Weyl, entonces $I + SU$ (respectivamente $I + US$) es de Weyl.

10. Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, T de Fredholm. Entonces existen $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S' \in \mathcal{L}(Y,X)$ tales que $\mathrm{dimR(T-S)} < \infty$ y

    $$S'S = I \text{ si } \mathrm{ind(T)} \leq 0$$

    $$SS' = I \text{ si } \mathrm{ind(T)} \geq 0$$

    En particular si T es de Weyl, S y S' son inversibles.