El dual del espacio L^p

Sea $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida.

Sea $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ $L^p = L^p(E,\mu)$

y sea q el exponente conjugado de p $(1/p + 1/q = 1)$

Si $g \in L^q$ pongamos para $f \in L^p$ $l_g(f) = \int_E f.g\, d\mu$

Por Hölder tenemos $|l_g(f)| \leqslant \| f \|_p . \| g \|_q$

por lo tanto l_g es una funcional lineal continua sobre L^p y tenemos $\| l_g \| \leqslant \| g \|_q$

En el siguiente teorema consideraremos el L^p real:

<u>Teorema:</u> Si $1 \leqslant p < +\infty$ y μ es σ-finita entonces si $l \in (L^p)^*$ existe una única $g \in L^q$ tal que $l = l_g$

Además $\| l_g \| = \| g \|_q$ de modo que la correspondencia $g \to l_g$ es una isometría entre $(L^p)^*$ y L^q

<u>Dem:</u>

<u>Etapa 1:</u> Supongamos primero que $\mu(E) < +\infty$

Sea $l \in (L^p)^*$ y pongamos $c = \| l \|$

Definamos una función $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$

en los conjuntos medibles $A \subseteq E$ por $\phi(A) = l(\chi_A)$

(donde χ_A es la función característica de A)

ϕ es finita de hecho $|\phi(A)| \leqslant c \| \chi_A \|_p = c\, \mu(A)^{1/p}$

Claramente ϕ es finitamente aditiva : si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$

luego $\phi(A \cup B) = l(\chi_A + \chi_B) = l(\chi_A) + l(\chi_B) = \phi(A) + \phi(B)$

$\phi(\varnothing) = l(0) = 0$

Afirmamos que ϕ es σ-aditiva si $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ con los A_k disjuntos

escribamos $A = A' \cup A''$ con $A' = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$ y $A'' = \bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_k$

$\phi(A) = \Phi(A') + \phi(A'') = \sum_{k=1}^{m} \phi(A_k) + \phi(A'')$

$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ Como $\mu(A) < +\infty$ esta serie converge $\Rightarrow$

$\mu(A'') = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(A_k) \to 0$ cuando $m \to +\infty$

Como $|\phi(A'')| \leqslant c\, \mu(A'')^{1/p} \Rightarrow \phi(A'') \to 0$ cuando $m \to +\infty$

Por lo tanto $\phi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(A_k) \Rightarrow \phi$ es σ-aditiva

Por lo tanto ϕ es una medida finita y como $|\phi(A)| \leqslant = c\ \mu(A)^{1/p}$

es absolutamente continua respecto a μ

Por el teorema de Radón - Nikodym existe una $g \in L^1(E,\mu)$ tal que $\phi(A) = \int_A g\, d\mu$ para cada conjunto medible $A \subseteq E$

Esto significa que $l(\chi_A) = \int_E \chi_A\, g\, d\mu \Rightarrow l(f) = \int_E f.g\, d\mu$ para cada función simple medible f

<u>Etapa</u> <u>2:</u> Para mostrar que la misma fórmula vale para cada $f \in L^p$ veamos que $g \in L^q$ y $\| g \|_q \leqslant c$

Si $p > 1$ elijamos funciones simples h_k no negativas que tiendan en forma creciente a $|g|^q$

Sean g_k las funciones simples definidas por $g_k = h_k^{1/p}.\text{sign } g$

$\| g_k \|_p = \| h_k \|_1^{1/p}$ y tenemos

$\int_E g_k.g\, d\mu = l(g_k) \leqslant c \| g_k \|_p = c.\| h_k \|_1^{1/p}$

Como $g_k.g = h_k^{1/p} |g| \geqslant h_k^{1/p}.h_k^{1/q} = h_k^{1/p+1/q} = h_k$ tenemos

$\| h_k \|_1 \leqslant \int_E g_k.g\, d\mu \leqslant c.\| h_k \|_1^{1/p}$

Podemos suponer $h_k \neq 0$ para k grande (porque sino $g = 0$ en casi todo punto y no habría nada que probar)

Por lo tanto dividiendo ambos lados de la desigualdad por $\| h_k \|_1^{1/p}$ tendremos $\| h_k \|_1^q \leqslant c$ pero por el teorema de la convergencia monótona (Bepo Levi)

$\| g \|_q^q = \int_E |g|^q\, d\mu = \lim \int_E h_k^q\, d\mu = \lim \| h_k \|_1^q \leqslant c$

Esto prueba nuestra afirmación si $p > 1$

Cuando $p = 1$ queremos ver $g \in L^\infty$ y $\| g \|_\infty \leqslant c$

Sea $\varepsilon > 0$ y pongamos $M = \{ x \in E: |g(x)| \geqslant c + \varepsilon \}$ queremos ver $\mu(M) = 0$

Sea $h = \text{sign } g.\chi_M$ es una función simple

$$l(h) = \int_E h.g\, d\mu = \int_M |g|\, d\mu \geqslant (c+\varepsilon)\ \mu(M)$$

pero por otra parte $l(h) \leqslant c \| h \|_1 = c\ \mu(M)$

De modo que $(c+\varepsilon)\ \mu(M) \leqslant c.\ \mu(M)$

Si fuera $\mu(M) \neq 0 \Rightarrow c + \varepsilon \leqslant c$ lo cual es absurdo

Por lo tanto $\mu(M) = 0 \Rightarrow |g(x)| \leqslant c + \varepsilon$ en casi todo punto

Como ε es arbitrario $\Rightarrow \| g \|_\infty \leqslant c$

<u>Etapa</u> <u>3:</u> para ver que $l(f) = \int_E f.g$ para cualquier $f \in L^p$
elijamos una sucesión de funciones simples f_k que converjan a f en norma p (usando que las funciones simples de L^p son densas en L^p)

Entonces $l(f_k) \to l(f)$ por ser l continua

Vamos a ver que $l(f_k) = \int_E f_k.g \, d\mu \to \int_E f.g \, d\mu$

Por la desigualdad de Hölder tenemos:

$$\left| \int_E f_k.d \, d\mu - \int_E f \, g \, d\mu \right| = \int_E |f_k - f|.|g| \, d\mu \leqslant \| f_k - f \|_p . \| g \|_q \to 0$$

cuando $k \to +\infty$

Esto prueba que $l = l_g$

Sabemos que $c = \| l \| = \| l_g \| \leqslant \| g \|_q$ y que $\| g \|_q \leqslant c$ por lo tanto tenemos $\| g \|_q = c$

Esto muestra que la correspondencia $T: L^q \to (L^p)^*$ dada por $T(g) = l_g$ conserva la norma

Es claro que es lineal y lo anterior muestra que es suryectiva

Es inyectiva pues

$\| l_g - l_{g'} \| = \| T(g) - T(g') \| = \| T(g-g') \| = \| g-g' \|_q$

por lo tanto si $l_g = l_{g'} \Rightarrow g = g'$ en casi todo punto

<u>Etapa</u> <u>4:</u> consideremos ahora el caso en que $\mu(E) = +\infty$ pero μ es σ-finita

entonces podemos escribir $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ con $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_k \subseteq E_{k+1} \subseteq \ldots$

y $\mu(E_k) < +\infty$ (Supongamos $1 < p < +\infty$)

Notamos que $L^p(E_k) \subseteq L^p(E)$ (dada $f \in L^p(E_k)$ la extendemos a E poniendo $f(x) = 0$ si $x \notin E_k$)

La restricción de l a $L^p(E_k)$ es una funcional lineal continua

y por lo antes demostrado existe unaúnica $g_k \in L^q(E_k)$ tal que

$l(f) = \int_{E_k} f.g_k \, d\mu$ para $f \in L^p(E)$ que se anula fuera de E_k

Para una tal f como $E_k \subseteq E_{k+1}$ tenemos:

$$l(f) = \int_{E_{k+1}} f.g_{k+1} \, d\mu = \int_{E_k} f.g_{k+1} \, d\mu$$

Esto implica que $g_k = g_{k+1}$ en casi todo punto de E_k

Podemos asumir $g_k = g_{k+1}$ en todo punto de E_k

Definamos g por $g(x) = g_k(x)$ si $x \in E_k$

Entonces g es medible

$\| g \|_q^q = \int_E |g|^q \, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_{E_k} |g|^q \, d\mu$ (por Bepo Levi) =

$= \lim_{k\to+\infty} \int_{E_k} |g_k|^q \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \| l_{/L^p(E_k)} \|^q$

pero $\| l_{/L^p(E_k)} \| \leqslant \| l \| \Rightarrow \| g \|_q \leqslant \| l \|$ (en particular $g \in L^q(E)$)

Si $f \in L^p \Rightarrow f.\chi_{E_k}$ converge en L^p a f:

$\| f.\chi_{E_k} - f \|_p^p = \int_E |f.\chi_{E_k} - f|^p \, d\mu = \int_{E-E_k} |-f|^p \, d\mu = \int_E |f|^p \, d\mu - \int_{E_k} |f|^p \, d\mu$

cuando $k \to +\infty$ $\int_{E_k} |f|^p \, d\mu \to \int_E |f|^p \, d\mu$ por Bepo Levi

Sea $f_k = f.\chi_{E_k}$ por lo anteriot $\| f_k - f \|_p^p \to 0 \Rightarrow l(f_k) \to l(f)$ (por ser l continua)

$l(f_k) = \int_{E_k} f_k . g_k \, d\mu = \int_E f_k . g \, d\mu$

Por Hölder $f.g \in L^1$ Tenemos $\int_E f_k g \, d\mu \to \int_E fg \, d\mu$ (pues $|f_k . g| \leqslant |f.g|$ y podemos aplicar el teorema de la convergencia mayorada)

Por lo tanto haciendo que $k \to +\infty$ tenemos $l(f) = \int_E f.g \, d\mu$

Por la observación previa entonces $\| l \| \leqslant \| g \|_q$ de modo que

$\| l \| = \| g \|_q$ y la prueba está completa.

<u>ejercicios:</u> * completar la prueba si $p = +\infty$

* extender el teorema al L^p complejo

(si l es una funcional lineal sobre el L^p complejo su parte real restringida al L^p real es una funcional sobre el L^p real)