

Análisis Funcional - 1º cuatrimestre 2005

OPERADORES ACOTADOS- ADJUNTO

PRINCIPIO DE ACOTACIÓN UNIFORME, TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA, TEOREMA DEL GRÁFICO CERRADO

1. Sean E y F espacios normados, $T : E \rightarrow F$ lineal. Son equivalentes:

(i) T es continuo.

(ii) T es continuo en 0.

(iii) T es acotado (i.e. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$)

2. Sean E y F espacios normados, $T : E \rightarrow F$ lineal. Entonces

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| < 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}\end{aligned}$$

$$\text{y } \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ una matriz simétrica. Considerar a A como un operador lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , utilizando en \mathbb{R}^n la norma euclídea. Probar que $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } A\}$.

4. **Operadores Shift:** Sean $1 \leq p \leq \infty$, $S : \ell^p \rightarrow \ell^p$, $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$ dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

a) Probar que $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es inyectivo. Calcular $\|S\|$.

b) Probar que $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es suryectivo. Calcular $\|T\|$.

c) $TS = I$, $ST \neq I$.

5. **Operadores de Multiplicación:**

a) Si $\varphi \in C[0, 1]$, sea $M_\varphi : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definida por

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

Probar que $M_\varphi \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ y calcular su norma.

b) Si $\varphi \in L^\infty[0, 1]$, probar que M_φ , es un operador acotado de $L^p[0, 1]$ en $L^p[0, 1]$ y calcular su norma.

6. **Operadores integrales:** Si $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$, sea $K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ dado por

$$(Kf)(s) = \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$$

Probar que $K \in \mathcal{L}(L^2[0, 1])$ y que $\|K\| \leq \|k\|_2$

7. Sea $\alpha = (\alpha_n)_n$ una sucesión de números complejos, $1 \leq p < \infty$, definimos $M_\alpha : \ell^p \rightarrow \ell^p$ por $M_\alpha((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$. Probar:

- a) M_α está bien definida $\Leftrightarrow \alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$
- b) M_α es inyectiva $\Leftrightarrow \alpha_n \neq 0 \forall n$
- c) M_α es un isomorfismo $\Leftrightarrow (\frac{1}{\alpha_n})_n \in \ell^\infty$
- d) $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$

- 8. Si $T, S, T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, entonces $(TS)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.
- 9. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| < 1$. Probar que $(I + A)$ es inversible, $(I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y que su inversa viene dada por

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X)$. Probar también que

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

- 10. Sea X un espacio de Banach y sea $T, T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Probar que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|$, entonces S es inversible, $S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, y

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| < \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|S - T\|\|T^{-1}\|}.$$

- 11. Sean E y F espacios de Banach y sean $x_n, x \in E$, $A_n, A \in \mathcal{L}(E, F) \forall n \in \mathbf{N}$. Si $x_n \rightarrow x$ y $A_n \rightarrow A$ entonces $A_n x_n \rightarrow Ax$

- 12. Sea E un espacio de Banach, sean $A_n, A, B_n, B \in \mathcal{L}(E)$.

(i) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

(ii) Si $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$ entonces $A_n B_n \rightarrow AB$

- 13. Sea E un espacio de Banach, sea $P : E \rightarrow E$ lineal tal que $P^2 = P$, sean $S = \ker(P)$, $T = R(P)$. Probar que $P \in \mathcal{L}(E)$ si y sólo si S y T son cerrados.

- 14. Sean E un espacio de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E)$ inversibles, $A \in \mathcal{L}(E)$ no inversible tales que $A_n \rightarrow A$, entonces $\|A_n^{-1}\| \rightarrow \infty$.

- 15. Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\exists Q \in \mathcal{L}(E) / Q^2 = Q, R(Q) = S$.

- 16. Sea E el espacio de Banach real $L^1((1, +\infty))$, sea $T : E \rightarrow E$ dado por $Tf(t) = \frac{1}{t} f(t)$. Probar que T es acotado pero no abierto.

(Sug: $0 \in T(B(0, 1))$ no es punto interior)

- 17. (i) Si $1 \leq p < \infty$, S y T son los shifts definidos en el ejercicio 4, calcular S^* y T^* .

(ii) Si $J : \ell^2 \rightarrow c_0$, $J(x) = x$, probar que $J \in \mathcal{L}(\ell^2, c_0)$ y calcular J^* .

- 18. Caracterizar M_φ^* , siendo M_φ los operadores de multiplicación por φ definidos en el ejercicio 5. (Tener en cuenta las caracterizaciones del dual de $C([0, 1])$ y L^p)

19. Sea E un espacio vectorial normado, sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ entonces $(AB)^* = B^*A^*$.
20. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

- a) $\|A\| = \|A^*\|$
 b) Si A es inversible entonces A^* es inversible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
 c) La aplicación $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$ dada por $\Phi(A) = A^*$ es continua.

21. Sean $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ dos conjuntos medibles de \mathbb{R}^n . Se definen los operadores

$$\rho : L^p(\tilde{\Omega}) \rightarrow L^p(\Omega), \quad e : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\tilde{\Omega}),$$

dados por $\rho(u) = u|_{\Omega}$ y $e(u)(t) = u(t)$ si $t \in \Omega$ y 0 en otro caso. Probar que ρ y e son acotados, calcular sus normas y calcular ρ^*, e^* .

22. Sean E un espacio de Banach, F un subespacio de E , S un subespacio de E^* . Probar que:

- a) $F^{\perp} = \{\gamma \in E^* : \gamma(x) = 0 \forall x \in F\}$ es un subespacio cerrado de E^* .
 b) ${}^{\perp}S = \{x \in E : \gamma(x) = 0 \forall \gamma \in S\}$ es un subespacio cerrado de E .
 c) ${}^{\perp}(F^{\perp}) = \overline{F}$
 d) $({}^{\perp}S)^{\perp} \supset \overline{S}$

23. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Probar que:

- a) $R(A)^{\perp} = \ker(A^*)$
 b) ${}^{\perp}R(A^*) = \ker(A)$
 c) $\overline{R(A)} = {}^{\perp}\ker(A^*)$
 d) $R(A^*) \subseteq (\ker(A))^{\perp}$

24. Sean E, F espacios vectoriales normados, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$, entonces

$$\text{dist}(x, \ker(T)) = \text{máx}\{|\varphi(x)| : \varphi \in (\ker(T))^{\perp}, \|\varphi\| \leq 1\}$$

25. Sean E un espacio de Banach, $F \subset E$ un subespacio y $\Phi : E^* \rightarrow F^*$ dada por $\Phi(\varphi) = \varphi|_F$. Probar que $\Phi \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$, Φ es suryectiva y calcular $\ker(\Phi)$.

26. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entonces $\widehat{T} : E/\ker(T) \rightarrow F$, dado por $\widehat{T}([x]) = T(x)$, es lineal, continuo y $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

27. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con $R(T)$ cerrado, entonces $R(T^*)$ es cerrado y

$$R(T^*) = (\ker(T))^{\perp}$$

28. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Entonces se dan los siguientes isomorfismos isométricos:

$$(E/S)^* \cong S^{\perp}$$

$$E^*/S^{\perp} \cong S^*$$

DEFINICIÓN: Sea E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice acotado inferiormente si y sólo si $\exists c > 0 / \|Tx\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in E$.

29. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$. Probar que:

- a) Si T es acotado inferiormente entonces $R(T)$ es cerrado.
- b) T acotado inferiormente y suryectivo si y sólo si T inversible.

30. Sea $V : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ el operador de Volterra, dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- a) Probar que V no es acotado inferiormente.
- b) Caracterizar V^* .

DEFINICIÓN: Sea E, F dos espacios de Banach, $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$. Decimos que T_n converge fuertemente a T si para cualquier $x \in E$ se tiene que $T_n(x) \rightarrow T(x)$.

- 31. Si T_n tiende fuertemente a T y x_n tiende a x entonces $T_n(x_n) \rightarrow T(x)$.
- 32. Si T_n tiende a T fuertemente y S_n tiende a S fuertemente, entonces $T_n S_n$ tiende a TS fuertemente.
- 33. Sean E, F dos espacios de Banach. Sean $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ tales que $A_n(x)$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Probar que existe un $A \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $A_n \rightarrow A$ fuertemente.
- 34. En el espacio ℓ^2 se definen las siguientes sucesiones operadores

$$A_n x = (x_1/n, \dots, x_k/n, \dots)$$

$$B_n x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

Decidir en cada caso si la sucesión tiende a cero en norma o fuertemente.

35. Sea X un espacio de Banach con cualquiera de las dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Si $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ implica que $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$, entonces las normas son equivalentes.

DEFINICIÓN: Sea E, F dos espacios de Banach, $T : D(T) \subset E \rightarrow F$ un operador lineal no acotado (donde $D(T)$ denota el dominio de T). Decimos que T es cerrado si $x_n \in D(T)$, $x_n \rightarrow x$ y $T(x_n) \rightarrow y$, implican que $x \in D(T)$ y $T(x) = y$.

- 36. a) T es cerrado si y sólo si $G(T) = \{(x, T(x)) : x \in D(T)\}$ es cerrado en $E \times F$.
- b) T es cerrado si y sólo si $D(T)$ resulta un espacio de Banach con la norma $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.
- c) Si T es cerrado y $D(T)$ es cerrado, entonces $T \in \mathcal{L}(D(T), F)$.
- d) Probar que el operador $T : D(T) = C^1[0, 1] \subset C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ dado por $T(x) = x'$ es cerrado.