

Análisis Funcional - Primer cuatrimestre de 2005

Práctica 4 - Espacios de Hilbert

1. Probar que son espacios de Hilbert:

a) \mathbb{C}^n , con producto escalar $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$

b) ℓ^2 , con producto escalar $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

c) $L^2(X)$, donde (X, Σ, μ) es un espacio de medida, con producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$$

2. Si H es un espacio vectorial y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ es sesquilineal y hermitiana, vale la fórmula de polarización, $\forall x, y \in H$:

$$a(x, y) = \frac{1}{4} \left\{ a(x+y, x+y) - a(x-y, x-y) + i \left[a(x+iy, x+iy) - a(x-iy, x-iy) \right] \right\}$$

En particular, en H Hilbert, $\forall x, y \in H$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 \right) \right\}$$

3. a) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Probar que existe un producto escalar que induce la norma de E (y que hace de E un espacio de Hilbert) si y sólo si $\|\cdot\|$ verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E$$

b) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, si $p \neq 2$ y $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$ no son espacios de Hilbert.

4. Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{e_n\}_n$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

a) $\{e_n\}_n$ es ortonormal maximal.

b) Si $x \in H$, $x \perp e_n \quad \forall n$, entonces $x = 0$.

5. Ortogonalización de Gram-Schmidt: Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $\{b_n\}_n$ es un subconjunto linealmente independiente de H que genera un subespacio denso en H .

a) Definamos $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ y, una vez definido e_n ,

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle b_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\|b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle b_{n+1}, e_k \rangle e_k\|}$$

Probar que $\{e_n\}_n$ es una base de H .

b) Si $\{f_n\}_n$ es un conjunto ortonormal tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, con $\lambda_n \neq 0$, tales que $f_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ entonces $f_n = \alpha_n e_n$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1 \quad \forall n$.

6. Desigualdad de Bessel: Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ un conjunto ortonormal. Probar que

a) $\forall x \in H$ y para cada $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

b) $\forall x \in H$, $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n \rangle|^2$ converge y $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

7. Sea H un espacio de Hilbert, si $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es una base de H entonces $\forall x \in H$ vale:

a) $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle e_n$

b) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n \rangle|^2$

c) Si $y \in H$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$

8. a) Probar que $\{e^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2$ dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$ es una base de ℓ^2 .

b) Probar que $\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de $L^2[-\pi, \pi]$.

c) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x)\}_{n=1}^\infty$ es una base de $L^2[-1, 1]$ considerado como \mathbb{R} espacio vectorial.

9. a) El conjunto $\{1, x, x^2, \dots\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2[-1, 1]$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que

$$e_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

donde $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$ son los polinomios de Legendre.

b) El conjunto $\{x^n e^{-x^2/2} : n \geq 0\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2(-\infty, \infty)$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(x) e^{-x^2/2}$$

donde $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$ son los polinomios de Hermite y $H'_n = 2n H_{n-1}$.

10. Sean H y K espacios de Hilbert. En $H \times K$ definimos

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle k_1, k_2 \rangle_K$$

Probar que $(H \times K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert, y que $H \times \{0\}$ y $\{0\} \times K$ son cerrados y ortogonales en $H \times K$.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $S \subset H$ un subespacio cerrado propio.

- a) Probar que existe $x \in H - S$ tal que $x \perp S$.
- b) Si $S^\perp = \{x \in H : x \perp S\}$ entonces S^\perp es un subespacio cerrado y $S \oplus S^\perp = H$.
- c) $(S^\perp)^\perp = S$
- d) Dar contraejemplos de (b) y (c) si S no es cerrado.

12. a) Sean H un espacio de Hilbert, $D \subset H$ un subconjunto. El subespacio generado por D es denso en H si y sólo si se verifica

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in D \Rightarrow x = 0$$

- b) En ℓ^2 sea $S = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$. Probar que S es denso en ℓ^2 .

13. Sean S y T subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert H . Probar que $S \oplus T$ es cerrado.

14. Sean H un espacio de Hilbert, $x_n, x \in H$.

- a) $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$
- b) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $e_n \xrightarrow{w} 0$
- c) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ entonces $x_n \rightarrow x$
- d) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m \rangle \rightarrow \langle x, e_m \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- e) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces existe una subsucesión x_{n_k} tal que su media aritmética $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \dots + x_{n_k})$ verifica que $z_k \rightarrow x$.

15. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H , son equivalentes:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge débilmente.
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

16. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert H y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión ortogonal en H que verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1,$$

entonces $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también completo.

Familias sumables.

Sean E un espacio de Banach, $(x_i)_{i \in I}$ una familia en E .

Definición: $\sum_{i \in I} x_i$ es de Cauchy si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset I$, F finito, tal que si G_1 y G_2 son subconjuntos finitos de I que contienen a F entonces

$$\left\| \sum_{i \in G_1} x_i - \sum_{i \in G_2} x_i \right\| < \varepsilon$$

17. Probar que la siguiente definición es equivalente a la anterior: $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset I$, F finito, tal que si $F \subset G \subset I$, G finito, entonces

$$\left\| \sum_{i \in G-F} x_i \right\| < \varepsilon$$

Definición: $\sum_{i \in I} x_i = x$ ($x \in E$) si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset I$, F finito, tal que si $F \subset G \subset I$, G finito, entonces

$$\left\| \sum_{i \in G} x_i - x \right\| < \varepsilon$$

En este caso se dice que la familia es sumable.

18. En un espacio de Banach E , $\sum_{i \in I} x_i$ es de Cauchy si y sólo si $(x_i)_{i \in I}$ es sumable.

19. Si $x = \sum_{i \in I} x_i$, $y = \sum_{i \in I} y_i$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$x + y = \sum_{i \in I} (x_i + y_i) \quad \wedge \quad \lambda x = \sum_{i \in I} (\lambda x_i)$$

20. Si $x = \sum_{i \in I} x_i$, $y \in H$, con H Hilbert, entonces

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y \rangle$$

21. Si $\sum_{i \in I} x_i$ es de Cauchy entonces $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ es a lo sumo numerable.

22. $\ell^2(I) = \{(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{C} : \sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty\}$, con $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i$, es un espacio de Hilbert.
(enunciar y probar Hölder para que el producto escalar esté bien definido)

23. Pitágoras: Sea $(x_i)_{i \in I}$ una familia ortogonal en un espacio de Hilbert H . $(x_i)_{i \in I}$ es sumable si y sólo si $(\|x_i\|^2)_{i \in I}$ es sumable y en tal caso

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2$$

24. Desigualdad de Bessel: Sea H un espacio de Hilbert. Si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia ortonormal en H y $x \in H$ entonces $(|\langle x, x_i \rangle|^2)_{i \in I}$ es una familia sumable y

$$\sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

25. Demostrar que todo espacio de Hilbert H admite una base y que dos bases cualesquiera son coordinables.
26. a) Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si todo sistema ortonormal es a lo sumo numerable.
 b) Si $\#(I) > \aleph_0$, $\ell^2(I)$ no es separable.

27. Sea H un espacio de Hilbert.

- a) Si $(x_i)_{i \in I}$ es una base de H , entonces $\forall x \in H$

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i \quad \wedge \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$$

- b) Si $(x_i)_{i \in I}$ es una base de H , entonces H es isométricamente isomorfo a $\ell^2(I)$.
 c) Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$.

Otros ejemplos: Espacios de Sobolev

28. Sean $f, g \in L^2(a, b)$, decimos que $f' = g$ en sentido débil si

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = - \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in C_0^1[a, b]$$

Definimos el espacio de Sobolev $H^1[a, b]$

$$H^1(a, b) = \{f \in L^2(a, b) : \exists g \in L^2(a, b) \text{ tal que } f' = g \text{ en sentido débil} \}$$

- a) Probar que $H^1(a, b)$ es un espacio de Hilbert si definimos el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f', g' \rangle$$

- b) Probar que si $f' = 0$ en sentido débil, entonces f es constante en casi todo punto.
 c) Probar que si $f \in H^1(a, b)$ y $F(x) = \int_a^x f'(x)$ entonces $f - F'(x)$ es constante en casi todo punto.

- d) Concluir $H^1(a, b)$ puede identificarse con el conjunto de las funciones f que son absolutamente continuas en $[a, b]$ tales que $f'(x)$ (que existe en casi todo punto) está en $L^2[a, b]$.
- e) Si $f \in H^1(a, b)$ y $x, y \in (a, b)$ entonces:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{1/2} \left(\int_x^y |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

29. De manera similar definimos el espacio de Sobolev $H^k[a, b]$ como el conjunto de aquellas funciones de $L^2(a, b)$ tales que $f^{(j)} \in L^2$ para $0 \leq j \leq k$. Probar que el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^k \langle f^{(j)}, g^{(j)} \rangle$$

hace de $H^k(a, b)$ un espacio de Hilbert.

30. Sea $H_{per}^k(0, 2\pi)$ el subespacio de las funciones de $H^k(a, b)$ tales que f y sus derivadas hasta el orden k son 2π periódicas:

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi) \quad \forall j \quad 0 \leq j < k$$

- a) Probar que $f \in H_{per}^k(a, b)$ si y sólo si sus coeficientes de Fourier \hat{f}_n verifican que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2k} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

(Sugerencia: ¿ Qué relación existe entre los coeficientes de Fourier de f y los de f' ?)

- b) ¿ Cómo se podría definir $H^s(a, b)$ para $s \in \mathbb{R}_{>0}$?

Convergencia puntual de Series de Fourier

31. La *serie de Fourier* de una función integrable $f(x)$ definida en $(0, 2\pi)$ es la serie

$$s(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}, \quad \text{donde } a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy.$$

Sea $s_n(f)(x) = \sum_{m=-n}^n a_m e^{imx}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ ($0 < x < 2\pi$).

- a) Probar que

$$s_n(f)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y+x) D_n(x) dx,$$

donde D_n es el núcleo de Dirichlet dado por:

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

b) Probar que si f verifica la condición de Dini en el punto x_0 :

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty$$

para algún $\delta > 0$, entonces $s_n(f)(x_0) \rightarrow f(x_0)$.

Sugerencia: utilizar el siguiente Lema de Riemann-Lebesgue: si $f \in L^1[0, 2\pi]$ entonces

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\omega x) dx \rightarrow 0 \text{ cuando } |\omega| \rightarrow \infty$$

32. Sea $X = \{f \in C([0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$.

a) Probar que X es un espacio de Banach.

b) Probar que el funcional lineal $T_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n(x) dx$$

es acotado y

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x)| dx.$$

c) Probar que $\|T_n\| \rightarrow \infty$. (Sugerencia: $|\sin \frac{1}{2}x| \leq \frac{1}{2}x$)

33. Probar que existe una función continua $f(x)$ en $0 \leq x \leq 2\pi$, con $f(0) = f(2\pi)$, tal que su serie de Fourier diverge en $x = 0$.

Sugerencia: Usar el problema anterior y el Teorema de Banach-Steinhaus.