

# Análisis Funcional - Primer cuatrimestre de 2005

## Práctica 4 - Espacios de Hilbert

1. Probar que son espacios de Hilbert:

a)  $\mathbb{C}^n$ , con producto escalar  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$

b)  $\ell^2$ , con producto escalar  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

c)  $L^2(X)$ , donde  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida, con producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$$

2. Si  $H$  es un espacio vectorial y  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  es sesquilineal y hermitiana, vale la fórmula de polarización,  $\forall x, y \in H$ :

$$a(x, y) = \frac{1}{4} \left\{ a(x+y, x+y) - a(x-y, x-y) + i \left[ a(x+iy, x+iy) - a(x-iy, x-iy) \right] \right\}$$

En particular, en  $H$  Hilbert,  $\forall x, y \in H$ :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \left( \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 \right) \right\}$$

3. a) Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Probar que existe un producto escalar que induce la norma de  $E$  (y que hace de  $E$  un espacio de Hilbert) si y sólo si  $\|\cdot\|$  verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E$$

b)  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ , si  $p \neq 2$  y  $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$  no son espacios de Hilbert.

4. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $\{e_n\}_n$  un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

a)  $\{e_n\}_n$  es ortonormal maximal.

b) Si  $x \in H$ ,  $x \perp e_n \quad \forall n$ , entonces  $x = 0$ .

5. Ortogonalización de Gram-Schmidt: Sea  $H$  un espacio de Hilbert y supongamos que  $\{b_n\}_n$  es un subconjunto linealmente independiente de  $H$  que genera un subespacio denso en  $H$ .

a) Definamos  $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$  y, una vez definido  $e_n$ ,

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle b_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\|b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle b_{n+1}, e_k \rangle e_k\|}$$

Probar que  $\{e_n\}_n$  es una base de  $H$ .

b) Si  $\{f_n\}_n$  es un conjunto ortonormal tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , con  $\lambda_n \neq 0$ , tales que  $f_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$  entonces  $f_n = \alpha_n e_n$ , con  $\alpha_n \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha_n| = 1 \quad \forall n$ .

6. Desigualdad de Bessel: Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$  un conjunto ortonormal. Probar que

a)  $\forall x \in H$  y para cada  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ .

b)  $\forall x \in H$ ,  $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n \rangle|^2$  converge y  $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ .

7. Sea  $H$  un espacio de Hilbert, si  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  es una base de  $H$  entonces  $\forall x \in H$  vale:

a)  $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle e_n$

b)  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n \rangle|^2$

c) Si  $y \in H$ ,  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$

8. a) Probar que  $\{e^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2$  dado por  $(e^n)_k = \delta_k^n$  es una base de  $\ell^2$ .

b) Probar que  $\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base de  $L^2[-\pi, \pi]$ .

c) Probar que  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x)\}_{n=1}^\infty$  es una base de  $L^2[-1, 1]$  considerado como  $\mathbb{R}$  espacio vectorial.

9. a) El conjunto  $\{1, x, x^2, \dots\}$  es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real  $L^2[-1, 1]$ . Su ortogonalización de Gram-Schmidt  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisface que

$$e_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

donde  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$  son los polinomios de Legendre.

b) El conjunto  $\{x^n e^{-x^2/2} : n \geq 0\}$  es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real  $L^2(-\infty, \infty)$ . Su ortogonalización de Gram-Schmidt  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisface que

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(x) e^{-x^2/2}$$

donde  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$  son los polinomios de Hermite y  $H'_n = 2n H_{n-1}$ .

10. Sean  $H$  y  $K$  espacios de Hilbert. En  $H \times K$  definimos

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle k_1, k_2 \rangle_K$$

Probar que  $(H \times K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Hilbert, y que  $H \times \{0\}$  y  $\{0\} \times K$  son cerrados y ortogonales en  $H \times K$ .

11. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $S \subset H$  un subespacio cerrado propio.

- Probar que existe  $x \in H - S$  tal que  $x \perp S$ .
- Si  $S^\perp = \{x \in H : x \perp S\}$  entonces  $S^\perp$  es un subespacio cerrado y  $S \oplus S^\perp = H$ .
- $(S^\perp)^\perp = S$
- Dar contraejemplos de (b) y (c) si  $S$  no es cerrado.

12. a) Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $D \subset H$  un subconjunto. El subespacio generado por  $D$  es denso en  $H$  si y sólo si se verifica

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in D \Rightarrow x = 0$$

- En  $\ell^2$  sea  $S = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$ . Probar que  $S$  es denso en  $\ell^2$ .

13. Sean  $S$  y  $T$  subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert  $H$ . Probar que  $S \oplus T$  es cerrado.

14. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $x_n, x \in H$ .

- $x_n \xrightarrow{w} x$  si y sólo si  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$
- Si  $\{e_n\}_n$  es una base de  $H$  entonces  $e_n \xrightarrow{w} 0$
- Si  $x_n \xrightarrow{w} x$  y  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  entonces  $x_n \rightarrow x$
- Si  $\{e_n\}_n$  es una base de  $H$  entonces  $x_n \xrightarrow{w} x$  si y sólo si  $(x_n)_n$  está acotada y  $\langle x_n, e_m \rangle \rightarrow \langle x, e_m \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- Si  $x_n \xrightarrow{w} x$ , entonces existe una subsucesión  $x_{n_k}$  tal que su media aritmética  $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \dots + x_{n_k})$  verifica que  $z_k \rightarrow x$ .

15. Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert  $H$ , son equivalentes:

- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge.
- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge débilmente.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$  converge.

16. Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert  $H$  y  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión ortogonal en  $H$  que verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1,$$

entonces  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es también completo.

## Familias sumables.

Sean  $E$  un espacio de Banach,  $(x_i)_{i \in I}$  una familia en  $E$ .

**Definición:**  $\sum_{i \in I} x_i$  es de Cauchy si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset I$ ,  $F$  finito, tal que si  $G_1$  y  $G_2$  son subconjuntos finitos de  $I$  que contienen a  $F$  entonces

$$\left\| \sum_{i \in G_1} x_i - \sum_{i \in G_2} x_i \right\| < \varepsilon$$

17. Probar que la siguiente definición es equivalente a la anterior:  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset I$ ,  $F$  finito, tal que si  $F \subset G \subset I$ ,  $G$  finito, entonces

$$\left\| \sum_{i \in G-F} x_i \right\| < \varepsilon$$

**Definición:**  $\sum_{i \in I} x_i = x$  ( $x \in E$ ) si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset I$ ,  $F$  finito, tal que si  $F \subset G \subset I$ ,  $G$  finito, entonces

$$\left\| \sum_{i \in G} x_i - x \right\| < \varepsilon$$

En este caso se dice que la familia es sumable.

18. En un espacio de Banach  $E$ ,  $\sum_{i \in I} x_i$  es de Cauchy si y sólo si  $(x_i)_{i \in I}$  es sumable.

19. Si  $x = \sum_{i \in I} x_i$ ,  $y = \sum_{i \in I} y_i$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces

$$x + y = \sum_{i \in I} (x_i + y_i) \quad \wedge \quad \lambda x = \sum_{i \in I} (\lambda x_i)$$

20. Si  $x = \sum_{i \in I} x_i$ ,  $y \in H$ , con  $H$  Hilbert, entonces

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y \rangle$$

21. Si  $\sum_{i \in I} x_i$  es de Cauchy entonces  $\{i \in I : x_i \neq 0\}$  es a lo sumo numerable.

22.  $\ell^2(I) = \{(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{C} : \sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty\}$ , con  $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i$ , es un espacio de Hilbert.  
(enunciar y probar Hölder para que el producto escalar esté bien definido)

23. Pitágoras: Sea  $(x_i)_{i \in I}$  una familia ortogonal en un espacio de Hilbert  $H$ .  $(x_i)_{i \in I}$  es sumable si y sólo si  $(\|x_i\|^2)_{i \in I}$  es sumable y en tal caso

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2$$

24. Desigualdad de Bessel: Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Si  $(x_i)_{i \in I}$  es una familia ortonormal en  $H$  y  $x \in H$  entonces  $(|\langle x, x_i \rangle|^2)_{i \in I}$  es una familia sumable y

$$\sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

25. Demostrar que todo espacio de Hilbert  $H$  admite una base y que dos bases cualesquiera son coordinables.
26. a) Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si todo sistema ortonormal es a lo sumo numerable.  
 b) Si  $\#(I) > \aleph_0$ ,  $\ell^2(I)$  no es separable.
27. Sea  $H$  un espacio de Hilbert.

- a) Si  $(x_i)_{i \in I}$  es una base de  $H$ , entonces  $\forall x \in H$

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i \quad \wedge \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$$

- b) Si  $(x_i)_{i \in I}$  es una base de  $H$ , entonces  $H$  es isométricamente isomorfo a  $\ell^2(I)$ .  
 c) Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a  $\ell^2(\mathbb{N})$ .

## Otros ejemplos: Espacios de Sobolev

28. Sean  $f, g \in L^2(a, b)$ , decimos que  $f' = g$  en sentido débil si

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = - \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in C_0^1[a, b]$$

Definimos el espacio de Sobolev  $H^1[a, b]$

$$H^1(a, b) = \{f \in L^2(a, b) : \exists g \in L^2(a, b) \text{ tal que } f' = g \text{ en sentido débil} \}$$

- a) Probar que  $H^1(a, b)$  es un espacio de Hilbert si definimos el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f', g' \rangle$$

- b) Probar que si  $f' = 0$  en sentido débil, entonces  $f$  es constante en casi todo punto.  
 c) Probar que si  $f \in H^1(a, b)$  y  $F(x) = \int_a^x f'(x)$  entonces  $f - F'(x)$  es constante en casi todo punto.

- d) Concluir  $H^1(a, b)$  puede identificarse con el conjunto de las funciones  $f$  que son absolutamente continuas en  $[a, b]$  tales que  $f'(x)$  (que existe en casi todo punto) está en  $L^2[a, b]$ .
- e) Si  $f \in H^1(a, b)$  y  $x, y \in (a, b)$  entonces:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{1/2} \left( \int_x^y |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

29. De manera similar definimos el espacio de Sobolev  $H^k[a, b]$  como el conjunto de aquellas funciones de  $L^2(a, b)$  tales que  $f^{(j)} \in L^2$  para  $0 \leq j \leq k$ . Probar que el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^k \langle f^{(j)}, g^{(j)} \rangle$$

hace de  $H^k(a, b)$  un espacio de Hilbert.

30. Sea  $H_{per}^k(0, 2\pi)$  el subespacio de las funciones de  $H^k(a, b)$  tales que  $f$  y sus derivadas hasta el orden  $k$  son  $2\pi$  periódicas:

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi) \quad \forall j \quad 0 \leq j < k$$

- a) Probar que  $f \in H_{per}^k(a, b)$  si y sólo si sus coeficientes de Fourier  $\hat{f}_n$  verifican que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2k} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

(Sugerencia: ¿ Qué relación existe entre los coeficientes de Fourier de  $f$  y los de  $f'$  ?)

- b) ¿ Cómo se podría definir  $H^s(a, b)$  para  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  ?

## Convergencia puntual de Series de Fourier

31. La *serie de Fourier* de una función integrable  $f(x)$  definida en  $(0, 2\pi)$  es la serie

$$s(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}, \quad \text{donde } a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy.$$

Sea  $s_n(f)(x) = \sum_{m=-n}^n a_m e^{imx}$ ,  $f(x + 2\pi) = f(x)$  ( $0 < x < 2\pi$ ).

- a) Probar que

$$s_n(f)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y+x) D_n(x) dx,$$

donde  $D_n$  es el núcleo de Dirichlet dado por:

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

b) Probar que si  $f$  verifica la condición de Dini en el punto  $x_0$ :

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty$$

para algún  $\delta > 0$ , entonces  $s_n(f)(x_0) \rightarrow f(x_0)$ .

Sugerencia: utilizar el siguiente Lema de Riemann-Lebesgue: si  $f \in L^1[0, 2\pi]$  entonces

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\omega x) dx \rightarrow 0 \text{ cuando } |\omega| \rightarrow \infty$$

32. Sea  $X = \{f \in C([0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$ .

a) Probar que  $X$  es un espacio de Banach.

b) Probar que el funcional lineal  $T_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n(x) dx$$

es acotado y

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x)| dx.$$

c) Probar que  $\|T_n\| \rightarrow \infty$ . (Sugerencia:  $|\sin \frac{1}{2}x| \leq \frac{1}{2}x$ )

33. Probar que existe una función continua  $f(x)$  en  $0 \leq x \leq 2\pi$ , con  $f(0) = f(2\pi)$ , tal que su serie de Fourier diverge en  $x = 0$ .

Sugerencia: Usar el problema anterior y el Teorema de Banach-Steinhaus.